Fondements de géométrie euclidienne

Jean Duprat

Fondements de géométrie euclidienne

Où l'on découvrira toute la modernité d'Euclide en installant la géométrie

plane sur un ordinateur...

Jean Duprat
Laboratoire LIP
Ecole Normale Supérieure de Lyon

Introduction

Pouquoi Euclide? La découverte puis l'usage de l'assistant de preuves *Coq* m'ont amené à une profonde réflexion sur les mathématiques que j'avais enseignées auparavant en collège et en lycée. Comme l'abstraction et l'axiomatisation m'étaient apparues lors de mes études comme des progrès en apportant davantage de rigueur et de formalisation, il me semblait que l'axiomatisation de la géométrie faite par Hilbert était un progrès sur la géométrie "à la règle et au compas" d'Euclide.

Avec la logique intuitionniste, l'isomorphisme de Curry-Howard et le calcul des constructions, une vision différente des mathématiques s'est fait jour dans mon esprit. L'accent porta désormais sur ce que l'on pouvait décider, ce que l'on pouvait construire en un temps fini avec des ressources finies par le truchement d'algorithmes.

C'est alors qu'Euclide réapparut avec une grande modernité puisque sa géométrie était basée sur ce que l'on pouvait effectivement construire. C'est pourquoi j'ai essayé de la reprendre comme une géométrie plane pour ordinateurs. C'est l'objectif de ce livre.

Comment s'y retrouver ? Ce livre n'est pas écrit comme un article scientifique ni comme des commentaires du développement *Coq* qui lui sert de base. Il ne s'y trouve ni liste de références, ni comparaison avec d'autres travaux. Ce n'est pas mépris de ma part, car la liste est longue des travaux et discussions qui m'ont permis de faire ce travail, mais mon objectf est différent. Les idées et concepts développés ici sont tellement simples qu'ils ne demandent qu'une petite culture mathématique et informatique de base pour être compris. Il n'est pas non plus nécessaire d'avoir une pratique de *Coq* ni même d'un assistant de preuves pour suivre le cheminement du développement.

Ce livre a été écrit en français car c'est ma langue maternelle et donc celle dans laquelle je puis m'exprimer le plus clairement. Ecrire ce livre en anglais aurait été au-delà de mes moyens. Par contre, dans le développement *Coq* les identificateurs sont en anglais afin de permettre un usage plus général de cette contribution.

Ce livre est divisé en tomes. Le premier expose les définitions et axiomes. Les suivants sont des développements dont l'objectif est de retrouver les notions usuelles de la géométrie plane. Après la conclusion qui offre trois pistes de développements futurs, se trouvent trois annexes. La première présente un jeu de tactiques apparaissant comme une interface entre une rédaction des preuves dans un langage plus contraint mais en langue vernaculaire et immédiatement compréhensible et l'exécution des preuves par le logiciel *Coq.* La seconde montre comment on peut retrouver les axiomes de Hilbert (avec une exception justifiée). La dernière présente une démonstration du théorème de Bolyai comme illustration du travail.

L'auteur vous souhaite une bonne lecture.

Livre 1 : Les Axiomes

A propos de ce tome : Dans ce tome ont été regroupés tous les axiomes nécessaires à la géométrie plane construite à l'aide de la règle et du compas. Il ne contient en plus que les définitions utiles à une écriture agréable de ces axiomes. Il ne contient donc ni propriétés ni théorèmes. Les plus immédiats d'entre eux sont proposés dans le tome 2. Certains lecteurs pourront donc choisir de faire de nombreux allers-retours entre ces deux tomes.

Avertissement : Dans tout ce livre 1, les remarques font appel à la notion intuitive que le lecteur possède du plan euclidien pour illustrer les concepts et les définitions introduites. Ces remarques ne sont là que pour essayer de faciliter la compréhension, elles n'ont aucun rôle dans la définition formelle de cette géométrie.

Notations : Certaines notions correspondent exactement à la notion usuelle, par exemple le cercle, elles en ont donc le nom et la notation. D'autres ne diffèrent que légèrement, par exemple les demi-droites $[AB)$ dont la définition a été étendue au cas $A = B$; par souci de simplicité, nom et notation ont été conservés afin d'alléger l'étude en limitant les nouvelles notations. Des noms et des notations nouvelles ont été introduites soit lorsqu'une notion nouvelle est très utilisée, par exemple dextrogyre, soit lorsque la notion usuelle sera introduite ultérieurement et que sa notation est alors réservée pour cet usage futur. Dans tous les cas, un avertissement fournit au lecteur les raisons qui nous ont amené à faire nos choix en matière de notation et de dénomination.

Langage : Chaque axiome, définition, propriété est d'abord présenté sous forme textuelle. Elle est généralement suivie d'une formulation dans le langage mathématique ensembliste car il est d'usage courant dans la communauté mathématique. Enfin chaque chapitre correspond à un fichier écrit en *Gallina* de la contribution `EuclidianGeometry`, le langage de l'assistant de preuve *Coq*, langage du calcul des constructions.

La plupart du temps, l'expressivité du langage ensembliste est suffisante pour exprimer correctement les notions. Il arrive toutefois que ce langage ne fournisse qu'une approximation de la définition exacte, par exemple, la notion de droite définie par deux points distincts n'est pas correctement rendue dans la notation (AB) où le fait que les points sont distincts reste sous entendu. En *Coq*, la doite sera définie par son constructeur, la règle (*ruler*), qui aura trois paramètres, le point A, le point B et une preuve de $A \neq B$. De plus, dans le calcul des constructions, le type des propriétés y est distinct du type des objets construits. Cette distinction est fort utile dans notre vision constructive de la géométrie, dans laquelle les points, les droites et les cercles sont des objets construits alors que leurs propriétés restent du domaine des propositions logiques.

Toutefois, on constatera que même ce langage ne permet pas d'exprimer exactement l'axiomatique proposée dans ce tome. En effet, il serait souhaitable de pouvoir dire que les points sont des objets définis inductivement, avec comme cas de base les deux points constants O et U, et comme constructeurs les intersections de droites sécantes, de cercles sécants ou de droite et de cercle lorsque la droite est diamètre du cercle. Trouver un formalisme de raisonnement dans lequel cette axiomatique s'exprimerait exactement est un domaine de recherche ouvert.

Tactiques A la suite des fichiers mentionnés dans ce tome, apparait dans la contribution `EuclidianGeometry` un fichier A7_Tactics.v. Il en sera de même après tous les fichiers décrits dans un tome.
Ces tactiques engrangent d'une certaine manière le savoir acquis dans un tome. Ainsi, les preuves dans les tomes suivants, sont allégées par une automatisation de l'utilisation de ces propriétés.
Ces fichiers servent également à mettre au point le jeu de tactiques qui seront proposées à l'utilisateur à la fin de l'ouvrage.

Leçon 1

Le plan

Coq : Cette leçon correspond au fichier `A1_Plan.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

1.1 Définitions et axiomes

1.1.1 Définition :

Le plan est un ensemble de **points**.

1.1.2 Axiome 1 :

Il existe au moins deux points notés **O** et **U**.

1.1.3 Axiome 2 :

Les points **O** et **U** sont distincts.

1.1.4 Définition :

On appelle **figure** du plan toute propriété du plan.

Remarque : On identifiera la figure avec le sous ensemble des points du plan vérifiant la propriété.

1.1.5 Définition :

On appelle **unicité** la propriété pour une figure de n'être satisfaite que par un point unique.

Remarque : Le fait que deux points satisfassent la même figure possédant la propriété d'unicité est une méthode de démonstration de l'égalité de deux points.

Leçon 2

L'orientation

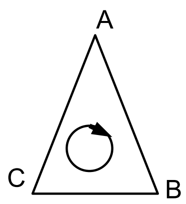
Avertissement : Cette leçon correspond au fichier `A2_Orientation.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

2.1 La relation dextrogyre

2.1.1 Définition :

La relation **dextrogyre** est une propriété relative aux triplets de points.

Notation : On écrira : $\circlearrowright ABC$.



Remarque : On dira que les points A, B et C sont **sinistrogyres** si les points B, A et C sont dextrogyres.

2.1.2 Définition :

A et B étant deux points donnés, on appelle **demi-plan A B** l'ensemble des points M vérifiant $\circlearrowright ABM$.

Notation : On écrira : $\Rsh AB$.

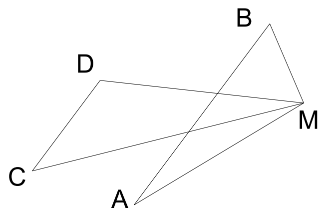
Remarques :

- Si les deux points sont distincts, le demi-plan ainsi défini est le demi-plan strict à droite de la droite (AB).
- Le demi-plan à gauche sera défini comme le demi-plan $\Rsh BA$.
- Si les points sont égaux, le demi-plan $\Rsh AA$ est vide.

2.1.3 Définition :

On dira que les points (A, B) ont **même orientation** que les points (C, D) si le demi-plan $\Rsh AB$ est contenu dans le demi-plan $\Rsh CD$.

Notation : On écrira : $AB \Rsh\Rsh CD$.



Par définition :

$$AB \Rsh\Rsh CD \iff (\forall M, \circlearrowleft ABM \Rightarrow \circlearrowleft CDM) \iff \Rsh AB \subseteq \Rsh CD.$$

Remarques :

- Cette relation est réflexive.
- Cette relation n'est pas symétrique.
- Lorsque les points sont distincts, cette relation entraine le parallélisme des droites (AB) et (CD).
- Lorsque les points A et B sont confondus, (A, B) ont la même orientation que (C, D) quels que soient les points C et D.
- Lorsque les points C et D sont confondus, seuls les points A et B confondus ont même orientation que C et D.

2.1.4 Définition :

On dira que les points (C, D) ont **même direction** que les points (A, B) si un des demi-plans $\Rsh AB$ ou $\Rsh BA$ est contenu dans un des demi-plans $\Rsh CD$ ou $\Rsh DC$.

Notation : On écrira : $AB \Rsh\Lsh CD$.
Par définition :

$$AB \Rsh\Lsh CD \iff \begin{cases} AB \Rsh\Rsh CD \ \vee AB \Rsh\Rsh DC \ \vee \\ BA \Rsh\Rsh CD \ \vee BA \Rsh\Rsh DC \ \vee \\ CD \Rsh\Rsh AB \ \vee CD \Rsh\Rsh BA \ \vee \\ DC \Rsh\Rsh AB \ \vee DC \Rsh\Rsh BA. \end{cases}$$

Remarque : Lorsque les points sont distincts, cette relation correspond au parallélisme de droites.

2.1.5 Définition :

A et B étant deux points, on appelle **demi-droite A B** la figure formée des points M tels que A et B aient même orientation que A et M.

Notation : On écrira $]AB)$. Par définition, $M \in]AB) \iff AB \Rsh\Rsh AM$.

Remarque : Lorsque les points A et B sont distincts, cette définition correspond à la notion usuelle de demi-droite ouverte; lorsque les points sont confondus, cette définition englobe tous les points du plan.

2.1.6 Définition :

A et B étant deux points, on appelle **demi-droite fermée A B** la figure formée des points M tels que A et M aient même orientation que A et B.

Notation : On écrira $[AB)$. Par définition, $M \in [AB) \iff AM \Rsh\Rsh AB$.

Remarque : Lorsque les points A et B sont distincts, cette définition correspond à la notion usuelle de demi-droite fermée; lorsque les points sont confondus, cette définition se réduit au point A.

2.1.7 Définition :

On dira que les points A, B et C sont **colinéaires** si ils ne sont ni dextrogyres ni sinistrogyres.

Notation : On écrira : $\overline{ABC}$.
Par définition : $\overline{ABC} \iff \not\circlearrowright ABC \wedge \not\circlearrowright BAC$.

Remarque : Cette définition correspond à la notion usuelle de colinéarité.

2.1.8 Définition :

On dira que le point B est **entre** les points A et C si A et B sont distincts et si A et B ont la même orientation que B et C.

Notation : On écrira : $A - B - C$.

Remarque : Cette notion est identique à celle d'intervalle ouvert : $B \in]AC[$.

2.1.9 Définition :

A et B étant deux points, on appelle **segment A B** la figure formée des points M appartenant aux deux demi-droites fermées $[AB)$ et $[BA)$.

Notation : On écrira $[AB]$.

2.2 Axiomes

2.2.1 Axiome 3 :

La relation dextrogyre est antisymétrique.

$$\forall ABC, \not\circlearrowright ABC \vee \not\circlearrowright BAC$$

Intuitivement : Les orientations dextrogyre et sinistrogyre sont exclusives l'une l'autre.

2.2.2 Axiome 4 :

La relation dextrogyre est stable par permutation circulaire.

$$\forall ABC, \circlearrowright ABC \Rightarrow \circlearrowright BCA$$

2.2.3 Axiome 5 :

Etant donnés trois points A, B et C, ils vérifient au moins l'une des propriétés suivantes :

- $\circlearrowright ABC$,
- $\circlearrowright BAC$,
- $C \in]AB)$,
- $C \in]BA)$.

Intuitivement : Le point C est soit dans le demi-plan à droite de (AB), soit dans le demi-plan à gauche, soit sur la droite. Dans ce dernier cas, il est soit du même côté que B par rapport à A, soit du même côté que A par rapport à B, ces deux cas n'étant pas exclusifs l'un de l'autre.

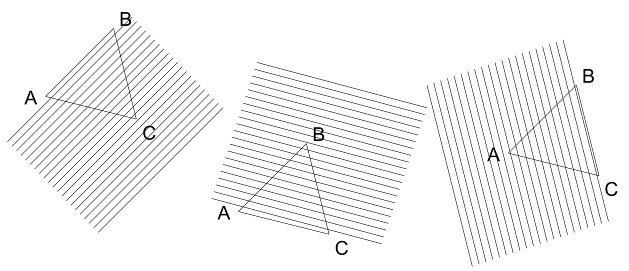
2.2.4 Axiome 6 :

Etant donné trois points (A, B, C) dextrogyres, tout point D du plan est tel que (A, B, D) sont dextrogyres, (A, D, C) sont dextrogyres ou (D, B, C) sont dextrogyres.

$$\forall ABCD, \circlearrowright ABC \Rightarrow \circlearrowright ABD \vee \circlearrowright ADC \vee \circlearrowright DBC$$

Remarques :

- cette axiome est appelé axiome des quatre points,
- il exprime la planarité, il est facile de prendre quatre points sur une sphère qui ne vérifient pas cet axiome.



2.2.5 Axiome 7 :

Etant donnés deux points A et B ayant même orientation que deux points C et D, si les points A, B et C sont colinéaires, alors les points B et A ont la même orientation que D et C.

$$\forall ABCD, AB \Rsh\Rsh CD \ \wedge \overline{ABC} \Rightarrow BA \Rsh\Rsh DC$$

Remarques :

- En fait, les quatre points sont alignés sur la même droite et les demi-plans sont donc égaux,
- l'axiome exprime donc le changement de sens sur la droite support des quatre points.

2.2.6 Axiome 8 :

Etant donnés deux points A et B ayant même orientation que deux points C et D, si les points A et B sont distincts, alors les points D et C ont la même orientation que B et A.

$$\forall ABCD, AB \Rsh\Rsh CD \ \wedge A \neq B \Rightarrow DC \Rsh\Rsh BA$$

Remarque : Si le demi-plan à droite de (AB) est inclus dans le demi-plan à droite de (CD), alors le demi-plan à gauche de (CD) est inclus dans le demi-plan à gauche de (AB).

Leçon 3

La métrique

Avertissement : Cette leçon correspond au fichier `A3_Metrique.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

3.1 La relation d'équidistance

3.1.1 Définition :

La relation **d'équidistance** est une propriété relative aux couples de couples de points (ou aux quadruplets de points).

Notation : On écrira : $AB \doteqdot CD$.

Remarque : On définira plus tard la notion de distance et on démontrera que l'égalité sur les distances est équivalente à l'équidistance. On réserve donc la notation $AB = CD$ qui n'apparaîtra qu'alors. Pour une compréhension intuitive des axiomes, on pourra sans contresens traduire l'équidistance en égalité des distances.

Remarque : Pour définir un axiome relatif à la propriété que la distance est archimédienne sans introduire l'ensemble des naturels, on va définir les aboutements successifs du segment $[AB[$ sur une demi-droite par induction :

3.1.2 Définition :

Etant donné deux points A et B, on dira que le point C est **[AB[-accessible** si

- (A, C) a la même orientation que (C, B)
- ou s'il existe un point D [AB[-accessible tel que (D, C) a la même orientation que (A, B) et que (A, B) et (D, C) sont équidistants.

Notation : Un point C [AB[-accessible sera noté : $[AB[\triangleright C$.

$$\forall\ A\ B\ C, AC \Rsh\!\Rsh CB \Rightarrow [AB[\triangleright C$$

$$\forall\ A\ B\ C\ D, [AB[\triangleright D\ \wedge DC \Rsh\!\Rsh AB\ \wedge AB \doteqdot DC \Rightarrow [AB[\triangleright C$$

.

Intuitivement : Lorsque les points A et B sont distincts, le premier cas correspond au fait que le point C appartient à $[AB[$, le second au fait que si D appartient au nième report du segment $[AB[$ sur la demi-droite $[AB)$, C appartient au (n+1)-ième report.

3.1.3 Définition :

On dira que trois couples de points (A, B), (C, D) et (E, F) vérifient **l'inégalité triangulaire** s'il existe trois points G, H et I tels que H appartienne au segment $[GI]$ et que les couples (G, H) et (H, I) soient respectivement équidistants avec (A, B) et (C, D) et qu'il existe un point J du segment $[GI]$ tel que le couple (G, J) soit équidistant avec (E, F).

Intuitivement : On reconnaît l'inégalité triangulaire usuelle lorsque l'on reporte les trois longueurs sur un même segment, $AB+CD \geqslant EF$ car $GH+HI \geqslant GJ$.

3.2 Axiomes

3.2.1 Axiome 9 :

L'équidistance est réflexive.

$$\forall\ A\ B, AB \doteqdot AB$$

3.2.2 Axiome 10 :

Deux couples de points équidistants à un même troisième sont équidistants.

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, AB \doteqdot CD\ \wedge AB \doteqdot EF \Rightarrow CD \doteqdot EF$$

Remarque : La relation d'équidistance est une relation d'équivalence sur les couples de points.

3.2.3 Axiome 11 :

Les couples de points confondus sont équidistants entre eux.

$$\forall\ A\ B, AA \doteqdot BB$$

Remarque : On aura reconnu la distance nulle.

3.2.4 Axiome 12 :

L'équidistance est indépendante de l'ordre des points dans le couple.

$$\forall\ A\ B, AB \doteqdot BA$$

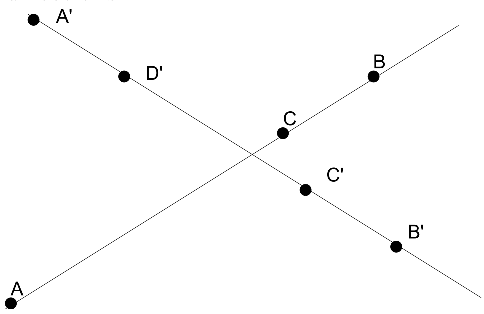
Remarque : La distance est symétrique.

3.2.5 Axiome 13 :

Etant donné un point C appartenant au segment $[AB]$, si sur une demi-droite fermée $[A'D')$ non dégénérée $(A' \neq D')$, les points B' et C' sont tels que (A, B) est équidistant avec (A', B') et (A, C) équidistant avec (A', C') alors le point C' appartient au segment $[A'B']$.

$$\forall\ A\ B\ C\ A'\ B'\ C'\ D',\ \left.\begin{array}{l} C \in [AB] \wedge \\ AB \doteqdot A'B' \wedge \\ AC \doteqdot A'C' \wedge \\ A' \neq D' \wedge \\ B' \in [A'D') \wedge \\ C' \in [A'D') \end{array}\right\} \Rightarrow C' \in [A'B']$$

Intuitivement : En interprétant le fait que $C \in [AB]$ par le fait que la distance AB est supérieure à la distance AC, on voit que cet axiome peut se comprendre comme l'ordre sur les distances est le même dans toutes les directions.



3.2.6 Axiome 14 :

Etant donnés un point B appartenant à un segment $[AC]$ et un point B' appartenant à un segment $[A'C']$, si (A, B) est équidistant avec (A', B') et (B, C) équidistant avec (B', C') alors (A, C) est équidistant avec (A', C').

$$\forall\ A\ B\ C\ A'\ B'\ C',\ \left.\begin{array}{l} B \in [AC] \wedge \\ B' \in [A'C'] \wedge \\ AB \doteqdot A'B' \wedge \\ BC \doteqdot B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow AC \doteqdot A'C'$$

Remarque : On reconnaît là la relation de Chasles.

3.2.7 Axiome 15 :

Etant donnés un point B appartenant à un segment $[AC]$, si (A, B) est équidistant avec (A', B') et (B, C) équidistant avec (B', C') et (A, C) est équidistant avec (A', C') alors le point B' appartient au segment $[A'C']$.

$$\forall\ A\ B\ C\ A'\ B'\ C',\ \left.\begin{array}{l} B \in [AC] \wedge \\ AB \doteqdot A'B' \wedge \\ BC \doteqdot B'C' \wedge \\ AC \doteqdot A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow B' \in [A'C']$$

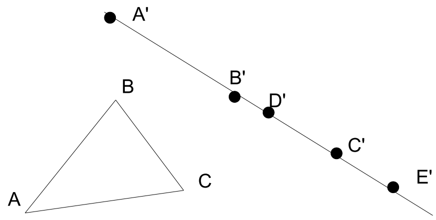
Remarque : On reconnaît la réciproque de la relation de Chasles.

3.2.8 Axiome 16 :

Etant donnés un point B' appartenant à un segment $[A'C']$, un point E' distinct de A' tel que C' et D' soient sur la demi-droite $[A'E')$, si (A, B) est équidistant avec (A', B'), si (B, C) équidistant avec (B', C') et si (A, C) est équidistant avec (A', D') alors le point D' appartient au segment $[A'C']$.

$$\forall\ A\ B\ C\ A'\ B'\ C'\ D'\ E',\ \left.\begin{array}{l} B' \in [A'C'] \wedge \\ A' \neq E' \wedge \\ C' \in [A'E') \wedge \\ D' \in [A'E') \wedge \\ AB \doteqdot A'B' \wedge \\ BC \doteqdot B'C' \wedge \\ AC \doteqdot A'D' \end{array}\right\} \Rightarrow D' \in [A'C']$$

Remarque : On reconnaît là l'inégalité triangulaire en regardant comment chaque longueur du triangle quelconque A, B, C ont été reportées sur la demi-droite $[A'E')$.



3.2.9 Axiome 17 :

Etant donnés deux points A et B, tout point C de la demi-droite fermée $[AB)$ est [AB[-accessible.

$$\forall\ A\ B\ C, C \in [AB) \Rightarrow [AB[\triangleright C$$

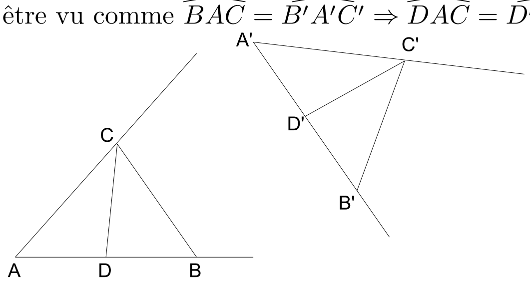
Remarque : Lorsque A est distinct de B, c'est la propriété d'Archimède.

3.2.10 Axiome 18 :

Etant donnés quatre points A, B, C et D tels que D soit sur la demi-droite fermée $[AB)$ et quatre points A', B', C' et D' tels que D' soit sur la demi-droite fermée $[A'B')$, si les couples (A, B) et (A', B') sont équidistants ainsi que les couples (A, C) et (A', C'), que les couples (B, C) et (B', C') et que les couples (A, D) et (A', D') alors les couples (C, D) et (C', D') sont équidistants.

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ A'\ B'\ C'\ D',\ \left.\begin{array}{l} D \in [AB) \wedge \\ D' \in [A'B') \wedge \\ AB \doteqdot A'B' \wedge \\ AC \doteqdot A'C' \wedge \\ BC \doteqdot B'C' \wedge \\ AD \doteqdot A'D' \end{array}\right\} \Rightarrow CD \doteqdot C'D'$$

Intuitivement : Cet axiome servira à introduire la notion d'angle, il peut être vu comme $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \Rightarrow \widehat{DAC} = \widehat{D'A'C'}$.

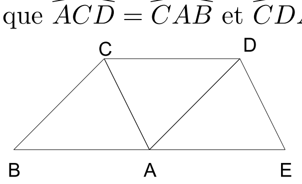


3.2.11 Axiome 19 :

Etant donnés cinq points A, B, C, D et E tels que les triplets (A, B, C), (A, C, D) et (A, D, E) soient dextrogyres et les couples (A, B) et (D, C) sont équidistants ainsi que les couples (B, C) et (A, D), que les couples (A, E) et (C, D) et que les couples (D, E) et (C, A) alors le point A est situé entre les points B et E.

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \wedge \\ \circlearrowright ACD \wedge \\ \circlearrowright ADE \wedge \\ AB \doteqdot DC \\ BC \doteqdot AD \\ AE \doteqdot CD \\ DE \doteqdot CA \end{array}\right\} \Rightarrow B - A - E$$

Intuitivement : On reconnaît la propriété de la somme des angles d'un triangle d'être égal à l'angle plat en considérant le triangle ACD et en remarquant que $\widehat{ACD} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{CDA} = \widehat{DAE}$.



Leçon 4

La droite

Coq : Cette leçon correspond au fichier `A4_Droite.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

4.1 Droites

4.1.1 Définition :

La **droite** est construite à la **règle** à partir de deux points distincts.

Notation : Etant donnés deux points A et B distincts, on note (AB) la droite construite sur ces points.

4.1.2 Définition :

Les points A et B sont appelés **points de construction** de la droite (AB), ces points sont distincts par définition de la droite.

Notation : On notera $\delta^{\triangleright}$ et $\delta^{\triangleleft}$ les points de construction de la droite δ.

Remarque : Les droites (AB) et (BA) sont des constructions distinctes.

4.2 Droites et points

4.2.1 Définition :

On dira qu'un point M **appartient à** la droite (AB) si M est colinéaire avec A et B. (On dira aussi M est **sur** la droite (AB)).

Notation : On utilisera le signe d'appartenance : $M \in (AB)$.

4.2.2 Définition :

On dira qu'une figure est **la représentation graphique** d'une droite si tout point de la figure appartient à la droite et réciproquement.

Remarque : Par abus de langage, on dira que cette figure est une droite.

4.3 Droites entre elles

4.3.1 Définition :

On dira que deux droites sont **parallèles** si les points de construction ont même direction.

Notation : On écrira : $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow AB \Rsh\Lsh CD$.

4.3.2 Définition :

On dira que deux droites sont **sécantes** si elles ne sont pas parallèles.

Notation : On écrira $(AB) \nparallel (CD)$.

4.4 Droite remarquable

4.4.1 Définition :

On appelle **premier axe** la droite (OU).

Leçon 5

Le cercle

Coq : Cette leçon correspond au fichier `A5_Cercle.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

5.1 Cercles

5.1.1 Définition :

Le **cercle** est construit au **compas** à partir d'un point C en utilisant deux points A et B pour définir l'ouverture des branches du compas.

Notation : Etant donnés trois points C, A et B, on note (C, AB) le cercle construit à partir de C en utilisant les points A et B.

5.1.2 Définition :

Le point C est appelé **centre** du cercle (C, AB) et les points A et B sont appelés **extrémités du rayon**.

Notations Si $\gamma = (C, AB)$ alors $\odot\gamma = C$ et $\rho_\gamma = AB$.

Remarque : Les cercles (C, AB) et (C, BA) sont des constructions distinctes.

Intuitivement : Les points A et B définissent le rayon du cercle qui sera la distance AB, mais le compas sera l'outil permettant de définir la distance en permettant de la transporter.

5.2 Cercles et points

5.2.1 Définition :

On dira qu'un point M **appartient au** cercle (C, AB) si les couples (C, M) et (A, B) sont équidistants. (On dira aussi M est **sur** le cercle (C, AB)).

Notation : On utilisera le signe d'appartenance : $M \in (C, AB)$.

Remarque : Cette définition, ainsi que la suivante, sera remplacée ultérieurement par une définition utilisant la notion de distance plus agréable à utiliser et plus usuelle.

5.2.2 Définition :

On dira qu'une figure est **la représentation graphique** d'un cercle si tout point de la figure appartient au cercle et réciproquement.

Remarque : Par abus de langage, on dira que cette figure est un cercle.

5.3 Cercles entre eux

5.3.1 Définition :

On dira que les six points A, B, C, D, E et F respectent la **spécification du triangle** si les trois couples de points (A, B), (C, D) et (E, F) vérifient l'inégalité triangulaire de même que les trois couples (C, D), (E, F) et (A, B) et les trois couples (E, F), (A, B) et (C, D).

Intuitivement : Les trois distances AB, CD et EF vérifient les inégalités triangulaires.

Notation : On écrira $\triangle(AB, CD, EF)$.

5.3.2 Définition :

On dira que deux cercles (C, AB) et $(C', A'B')$ sont **sécants** si les centres C et C' sont distincts et si les six points A, B, A', B', C et C' respectent la spécification du triangle.

Notation : On écrira $(C, AB) \between (C', A'B')$.

5.4 Cercle et droite

5.4.1 Définition :

On dira que la droite δ est un **diamètre** du cercle γ si le centre de γ appartient à la droite δ.

Notation : On écrira $\delta \oslash \gamma$.

5.5 Cercle remarquable

5.5.1 Définition :

On appelle **cercle unité** le cercle (O, OU).

Leçon 6

Les intersections

Coq : Cette leçon correspond au fichier `A6_Intersection.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

6.1 Intersections

6.1.1 Définition :

On appelle **intersection** une figure définie dans l'un des trois cas suivants :

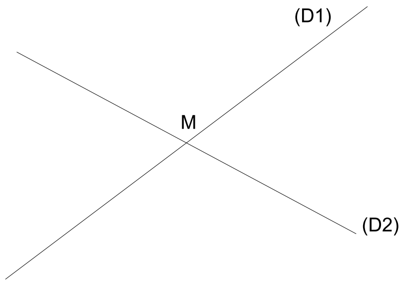
- **intersection de droites :** étant données deux droites δ_1 et δ_2 sécantes, la figure définie par la conjonction de l'appartenance aux deux droites est une intersection,

- **intersection de cercles :** étant donnés deux cercles γ_1 et γ_2 sécants, la figure définie par la conjonction de l'appartenance aux deux cercles et de la propriété de ne pas être dextrogyre avec le centre de γ_1 et le centre de γ_2 est une intersection,

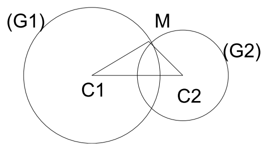
- **intersection d'un diamètre :** étant donnés une droite (AB) et un cercle (C, DE) dont (AB) est un diamètre, la figure définie par la conjonction de l'appartenance à la droite, de l'appartenance au cercle et de la propriété pour un point M d'être tel que (C, M) a même orientation que (A, B) est une intersection.

Notation : Il s'agit là d'une notion beaucoup plus restrictive que l'intersection ensembliste, on adoptera la notation $\Cap$.

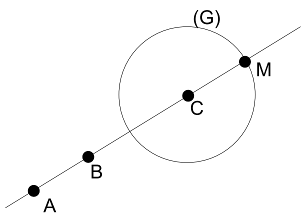
- $$\forall \delta_1 \delta_2, \delta_1 \nparallel \delta_2 \Rightarrow \delta_1 \Cap \delta_2 : M \mapsto M \in \delta_1 \wedge M \in \delta_2$$



- $$\forall\ \gamma_1\ \gamma_2, \gamma_1 \between \gamma_2 \Rightarrow$$
$$\gamma_1 \Cap \gamma_2 : M \mapsto M \in \gamma_1 \wedge M \in \gamma_2 \wedge \not\circlearrowright M (\odot \gamma_1)(\odot \gamma_2)$$



- $$\forall\ \delta, \forall\ \gamma, \delta \oslash \gamma \Rightarrow$$
$$\delta \Cap \gamma : M \mapsto M \in \delta \wedge M \in \gamma \wedge (\odot \gamma) M \Rsh\!\Rsh\ \delta_1 \delta_2$$



Remarques :

- De même que dans la notation de la droite (AB) le fait que les points soient distincts est sous entendu, de même dans la notation $\delta_1 \Cap \delta_2$, la précondition nécessaire que les droites soient sécantes est sous entendue. Les utilisateurs de *Coq* pourront constater que l'assistant de preuve exige la présence d'une preuve de la précondition dans les hypothèses ou la fourniture de celle-ci par l'utilisateur avant d'accepter l'intersection.

- Cette notion va nous permettre de construire d'autres points que O et U. Afin d'éviter toute ambiguïté dans le cas d'intersection de cercles ou d'un cercle avec un diamètre, une condition d'orientation est ajoutée à la définition.

- Il est facile de voir que l'on peut construire les deux intersections entre deux cercles avec $\gamma_1 \Cap \gamma_2$ et $\gamma_2 \Cap \gamma_1$, ainsi que les deux intersections d'un diamètre et d'un cercle avec $(AB) \Cap \gamma$ et $(BA) \Cap \gamma$.

6.2 Construction de point

6.2.1 Axiome 20 :

Etant donnée une figure f, si f est une intersection alors on sait construire un point et un seul M satisfaisant f.

$$\forall\ f, \text{intersection}(f) \Rightarrow \exists! M, f(M)$$

Notation Les points construits à l'aide de l'axiome 20 à partir d'une intersection seront notés en utilisant le même symbole, contrairement aux fichiers *Coq* dans lesquels un nom différent est nécessaire pour chaque construction. La nature des objets entourant le symbole suffira à lever toute ambiguïté :

- si $\delta_1 \nparallel \delta_2$ le point d'intersection est $\delta_1 \sqcap\!\!\!\cdot\ \delta_2$
- si $\gamma_1 \between \gamma_2$ le point d'intersection est $\gamma_1 \sqcap\!\!\!\cdot\ \gamma_2$
- si $\delta \oslash \gamma$ le point d'intersection est $\delta \sqcap\!\!\!\cdot\ \gamma$

Différence avec la géométrie de Hilbert : Bien que dans cette présentation axiomatique, rien n'interdit d'avoir dans l'ensemble des points, posé au départ, des points inaccessibles par toute construction à la règle et au compas à partir des points O et U, il est clair que dans toute la suite les points qui apparaitront ne seront que les points constructibles. La géométrie ainsi définie peut être celle d'Euclide mais pas celle d'Hilbert, l'axiome de complétude de la droite ne pouvant être satisfait.

Egalité de points : Cet axiome 20 fournit non seulement la seule façon de construire des points mais aussi la seule manière (autre que la réflexivité) de démontrer l'égalité des points. Comme en *Coq* l'égalité est définie comme la plus petite relation réflexive, afin de ne pas avoir d'incohérence, nous avons introduit la notion d'intersection comme propriété des figures, puis l'axiome qui envoie l'intersection sur un point, ainsi chaque construction d'un point conduit à une intersection différente qui se projette sur le même point. C'est donc bien cet axiome 20 qui a du mal à être exprimé dans le calcul des constructions.

Livre 2 : Premières propriétés

A propos de ce tome : Selon leur importance et leur difficulté, les énoncés sont démontrés (théorèmes) ou non (propriétés). La démonstration des propriétés est laissée au soin du lecteur. Les théorèmes sont énoncés et démontrés.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 7

Propriétés de l'orientation

Avertissement : Cette leçon correspond au fichier `B1_ClockwiseProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Exercice préliminaire : Deux points sont distincts s'il existe une propriété satisfaite par l'un et non par l'autre :

$$\forall\ f : \text{figure}, \forall\ A\ B : \text{point}, f(A) \wedge \neg f(B) \Rightarrow A \neq B$$

7.1 Exercices

- Si (A, B, C) sont dextrogyres, il en est de même de (B, C, A) et (C, A, B) (ex. 1 et 2)
- Si dans un triplet de points, deux points sont confondus, ces points ne sont pas dextrogyres (ex. 3 à 5)
- Trois points dextrogyres sont distincts deux à deux (ex. 6 à 8)
- Trois points dextrogyres ne sont pas sinistrogyres

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright ABC \Rightarrow \circlearrowright BCA.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright ABC \Rightarrow \circlearrowright CAB.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B, \not\circlearrowright AAB.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B, \not\circlearrowright ABA.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B, \not\circlearrowright ABB.$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright ABC \Rightarrow A \neq B.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright ABC \Rightarrow B \neq C.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright ABC \Rightarrow C \neq A.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright ABC \Rightarrow \not\circlearrowright BAC.$

Leçon 8

Propriétés de la colinéarité

Avertissement : Cette leçon correspond au fichier `B2_CollinearProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

8.1 Exercices

- Trois points dont deux sont confondus sont colinéaires (ex. 1 à 3)
- Trois points non colinéaires sont distincts (ex. 4 à 6)
- Trois points colinéaires le sont quel que soit l'ordre dans lequel ils apparaissent dans le triplet (ex. 7 à 11)
- Trois points colinéaires ne sont pas dextrogyres (ex. 12)
- Trois points dextrogyres ou sinistrogyres ne sont pas colinéaires (ex. 13 et 14)

Ex. 1: $\forall\ A\ B, \overline{AAB}.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B, \overline{ABA}.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B, \overline{ABB}.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C, \neg\overline{ABC} \Rightarrow A \neq B.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C, \neg\overline{ABC} \Rightarrow B \neq C.$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C, \neg\overline{ABC} \Rightarrow C \neq A.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow \overline{BCA}.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow \overline{CAB}.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow \overline{BAC}.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow \overline{ACB}.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow \overline{CBA}.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow \not\circlearrowright ABC$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright ABC \Rightarrow \neg\overline{ABC}$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright BAC \Rightarrow \neg\overline{ABC}$.

Leçon 9

Propriétés d'orientation similaire

Avertissement : Cette leçon correspond au fichier `B3_EquiOrientedProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

9.1 Exercices

- Le couple (A, A) a la même orientation que tout couple de points (ex. 1).
- Si (A, B) a la même orientation que (C, D) alors les triplets (A, B, C) et (A, B, D) ne sont pas dextrogyres (ex. 2 et 3).
- Les exercices 4 à 6 décrivent des cas où l'on peut permuter les couples de points.
- Dans les exercices 7 à 18, on examine les cas où (A, B) a la même orientation qu'un couple dont l'un des points est A ou B, les points sont alors colinéaires et l'on peut changer l'orientation sur la droite supportant ces points toujours ou si A est distinct de B.
- Si B est un point du segment $[AC]$ distinct de C alors (A, B) a la même orientation que (B, C) (ex. 19).
- Les exercices 20 et 21 examinent la transitivité de la relation.
- Les exercices 22 à 29 permettent de déduire que des triplets sont non colinéaires ou non dextrogyres.
- Enfin l'exercice 30 est une utilisation de la notion d'orientation similaire, si (A, B, C) est dextrogyre, quel que soit le point D de $]AB)$ et le point E de $]AC)$, (A, D, E) est dextrogyre.

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C, AA \Rsh\Rsh BC.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D, AB \Rsh\Rsh CD \Rightarrow \not\circlearrowright ABC.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D, AB \Rsh\Rsh CD \Rightarrow \not\circlearrowright ABD.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD\ \wedge \\ A \neq B\ \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow CD \Rsh\Rsh AB.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD\ \wedge \\ A \neq B\ \wedge \\ \overline{BCD} \end{array}\right\} \Rightarrow CD \Rsh\Rsh AB.$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD\ \wedge \\ A \neq B\ \wedge \\ (\overline{ABC}\ \vee \overline{BCD}) \end{array}\right\} \Rightarrow CD \Rsh\Rsh AB.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\Rsh AC \Rightarrow BA \Rsh\Rsh CA.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\Rsh CA \Rightarrow \overline{ABC}.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\Rsh CA \Rightarrow BA \Rsh\Rsh AC.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\Rsh BC \Rightarrow BA \Rsh\Rsh CB.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\Rsh CB \Rightarrow \overline{ABC}.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\Rsh AC \Rightarrow \overline{ABC}.$

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\Rsh BC \Rightarrow \overline{ABC}.$

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\Rsh CB \Rightarrow BA \Rsh\Rsh BC.$

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh AC\ \wedge \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow AC \Rsh\Rsh AB.$

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CA\ \wedge \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow CA \Rsh\Rsh AB.$

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh BC\ \wedge \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow BC \Rsh\Rsh AB.$

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CB\ \wedge \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow CB \Rsh\Rsh AB.$

Ex. 19: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} B \in [AC]\ \wedge \\ B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow AB \Rsh\Rsh BC.$

Ex. 20: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD\ \wedge \\ CD \Rsh\Rsh EF \end{array}\right\} \Rightarrow AB \Rsh\Rsh EF.$

Ex. 21: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \overline{BCD}\ \wedge \\ AB \Rsh\Rsh DE\ \wedge \\ BC \Rsh\Rsh DE \end{array}\right\} \Rightarrow AC \Rsh\Rsh DE.$

Ex. 22: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD\ \wedge \\ ((A \neq B \wedge \circlearrowright CDA) \vee \\ \ (A \neq B \wedge \circlearrowright CDB) \vee \\ \ \circlearrowright BAD) \end{array}\right\} \Rightarrow \neg\overline{ABC}.$

Ex. 23: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ \circlearrowright CDA \end{array}\right\} \Rightarrow \neg\overline{BCD}.$

Ex. 24: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ (\overline{ABC} \vee \overline{BCD}) \end{array}\right\} \Rightarrow \not\circlearrowright CDA.$

Ex. 25: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD \wedge \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow \not\circlearrowright DCA.$

Ex. 26: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \not\circlearrowright CDB.$

Ex. 27: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD \wedge \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow \not\circlearrowright DCB.$

Ex. 28: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \not\circlearrowright BAD.$

Ex. 29: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \Rsh\Rsh CD \wedge \\ C \neq D \wedge \\ \overline{BCD} \end{array}\right\} \Rightarrow \not\circlearrowright BAC.$

Ex. 30: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \wedge \\ D \in]AB) \wedge \\ E \in]AC) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright ADE.$

Leçon 10

Propriétés de demi-droites

Avertissement : Cette leçon correspond au fichier `B4_RaysProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

10.1 Exercices

Dans plusieurs de ces exercices, le cas général est évident mais il est intéressant de constater que la propriété est encore vraie dans les cas particuliers de points égaux, il faut souvent revenir aux définitions pour s'en convaincre.

- Tout point est sur la demi-droite ouverte $]AA)$ (ex. 1).
- Le point B est sur la demi-droite $]AB)$ (ex. 2).
- Si le point C est sur la demi-droite $]AB)$, alors les trois points sont colinéaires (ex. 3).
- Si le point C est sur la demi-droite $]AB)$ et le point D est sur la demi-droite $]AC)$, alors le point D est sur la demi-droite $]AB)$ (ex. 4).
- De l'axiome des quatre cas et des exercices précédents, on déduit plusieurs décompositions par cas (ex. 5 à 10).
- Si le point C est sur la demi-droite $[AB)$, alors les trois points sont colinéaires (ex. 11).
- Si le point C est sur la demi-droite $[AB)$, alors le point B est sur la demi-droite $]AC)$ (ex. 12).
- Si le point C est sur la demi-droite $]AB)$, alors le point C est sur la demi-droite $[AB)$ (ex. 13).
- A et B étant deux points distincts, si le point C est sur la demi-droite $]AB)$, alors le point B est sur la demi-droite $]AC)$ (ex. 14).
- Si (C, D) a la même orientation que (A, B), si le point C est sur la demi-droite $[AB)$, alors le point D est sur la demi-droite $[AB)$ (ex. 15).

Ex. 1: $\forall\ A\ B, B \in]AA)$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B, B \in]AB)$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C, C \in]AB) \Rightarrow \overline{ABC}$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} C \in]AB) \wedge \\ D \in]AC) \end{array}\right\} \Rightarrow D \in]AB)$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C, \left\{\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \vee \\ \circlearrowright BAC \vee \\ \overline{ABC}. \end{array}\right.$

Ex. 6: $\forall\ M, \forall\ l, \left\{\begin{array}{l} M \in l \vee \\ M \notin l. \end{array}\right.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C \in]AB) \vee \\ C \in]BA). \end{array}\right.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, \not\circlearrowright ABC \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \circlearrowright BAC \vee \\ \overline{ABC}. \end{array}\right.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, \neg\overline{ABC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \vee \\ \circlearrowright BAC. \end{array}\right.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C \in [AB] \vee \\ A \in [BC] \vee \\ B \in [CA]. \end{array}\right.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C, C \in [AB) \Rightarrow \overline{ABC}$.

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C, C \in [AB) \Rightarrow B \in]AC)$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C, C \in]AB) \Rightarrow B \in [AC)$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ C \in]AB) \end{array}\right\} \Rightarrow B \in]AC)$.

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} CD \Rsh\Rsh AB \wedge \\ C \in [AB) \end{array}\right\} \Rightarrow D \in [AB)$.

10.2 Théorème

10.2.1 Enoncé

Etant donnés deux points A et B distincts et deux points C et D colinéaires avec A et B, alors A, C et D sont colinéaires.

$$\forall\ A\ B\ C\ D, A \neq B \wedge \overline{ABC} \wedge \overline{ABD} \Rightarrow \overline{ACD}$$

.

10.2.2 Preuve

On décompose en quatre cas :

- $C \in]AB) \ \wedge D \in]AB)$.
- $C \in]AB) \ \wedge D \in]BA)$.
- $C \in]BA) \ \wedge D \in]AB)$.
- $C \in]BA) \ \wedge D \in]BA)$.

Dans chaque cas, on raisonne par l'absurde en revenant aux définitions de colinéaire comme la disjonction de deux négations d'orientation dextrogyre, et l'appartenance à une demi-droite comme une implication de propriétés d'orientation dextrogyre.
Par exemple, montrons que dans le premier cas, on ne peut avoir $\circlearrowright ACD$.
Supposons donc $\circlearrowright ACD$. Comme $C \in]AB)$, par définition $AB \Rsh\Rsh AC$. Comme $A \neq B$, d'après l'ex. 15 leçon 9, $AC \Rsh\Rsh AB$, c'est-à-dire

$$\forall M, \circlearrowright ACM \Rightarrow \circlearrowright ABM.$$

En appliquant à D, il vient $\circlearrowright ABD$ ce qui est contraire à l'hypothèse $\overline{ABD}$.

Leçon 11

Propriétés de la relation entre

Avertissement : Cette leçon correspond au fichier `B5_BetweenProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

11.1 Exercices sur la relation entre

- Si le point B est entre A et C, alors les trois points sont colinéaires (ex. 1).
- Si le point B est entre A et C, alors A et B sont distincts (ex. 2).
- Si le point B est entre A et C, alors C est sur la demi-droite $]AB)$, B est sur la demi-droite $]AC)$ et A sur la demi-droite $]CB)$ (ex. 3, 4 et 5).
- Si le point D est sur la demi-droite $]BC)$ et le point B entre A et C, alors le point B est entre A et D (ex. 6).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow \overline{ABC}$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow A \neq B$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow C \in]AB)$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow B \in]AC)$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow A \in]CB)$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{c} D \in]BC) \wedge \\ A - B - C \end{array}\right\} \Rightarrow A - B - D$.

11.2 Théorème

11.2.1 Enoncé

Etant donnés trois points A, E et D dextrogyres et un point B colinéaire à D et E et situé entre A et C, alors C, D et E sont dextrogyres.

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright AED \wedge \\ \overline{DEB} \wedge \\ A - B - C \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright CDE$$

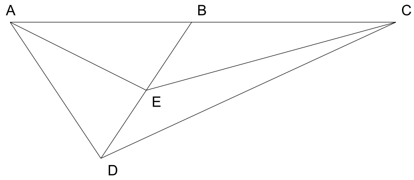
.

11.2.2 Preuve

On décompose en deux cas :

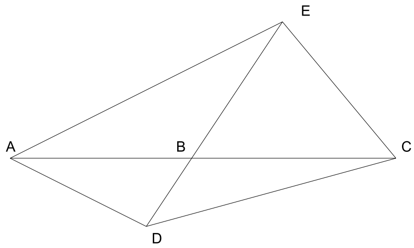
- $B \in]DE)$.
- $B \in]ED)$.

Dans le premier cas, la figure est la suivante :



Puisque $B \in]DE)$ et $\circlearrowright AED$, on en déduit $\circlearrowright ABD$. Comme $A - B - C$, il vient $\circlearrowright BCD$ puis $\circlearrowright CDE$.

Dans le second cas, la figure est la suivante :



Puisque $B \in]ED)$ et $\circlearrowright AED$, on en déduit $\circlearrowright AEB$. Comme $A - B - C$, il vient $\circlearrowright ECB$ puis $\circlearrowright CDE$.

11.3 Exercices sur le segment (intervalle fermé)

- Les points A et B appartiennent au segment $[AB]$ (ex. 7 et 8).
- Tout point de $[AB]$ est point de $[BA]$ (ex. 9).
- Si le point C appartient à $[AB]$, alors les trois points sont colinéaires (ex. 10).

- Si le point C appartient à $[AB]$, alors B est sur la demi-droite $]AC)$ (ex. 11).
- Si le point C, distinct de A, appartient à $[AB]$, alors C est sur la demi-droite $]AB)$ (ex. 12).
- Si le point B est entre A et C alors B appartient à $[AC]$ (ex. 13).
- Si le point B distinct de A et C appartient à $[AC]$ alors B est entre A et C (ex. 14).
- Si (A, B) a même orientation que (B, C) alors B appartient à $[AC]$ (ex. 15).
- Si (C, D) a même orientation que (A, B) et que C est sur la demi-droite fermée $[AB)$ alors C appartient à $[AD]$ (ex. 16).
- Si B appartient à $[AC]$ et si C appartient à $[AD]$, alors C appartient à $[BD]$ (ex. 17).
- Si B appartient à $[AC]$ et si C appartient à $[AD]$, alors B appartient à $[AD]$ (ex. 18).

Ex. 7: $\forall\ A\ B, A \in [AB]$.

Ex. 8: $\forall\ A\ B, B \in [AB]$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, C \in [AB] \Rightarrow C \in [BA]$.

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C, C \in [AB] \Rightarrow \overline{ABC}$.

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C, C \in [AB] \Rightarrow B \in]AC)$.

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} C \in [AB] \wedge \\ A \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow C \in]AB)$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow B \in [AC]$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} B \in [AC] \wedge \\ B \neq A \wedge \\ B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow A - B - C$.

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C, AB \upuparrows BC \Rightarrow B \in [AC]$.

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} CD \upuparrows AB \wedge \\ C \in [AB) \end{array}\right\} \Rightarrow C \in [AD]$.

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} B \in [AC] \wedge \\ C \in [AD] \end{array}\right\} \Rightarrow C \in [BD]$.

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} B \in [AC] \wedge \\ C \in [AD] \end{array}\right\} \Rightarrow B \in [AD]$.

Leçon 12

Propriétés de la relation même direction

Avertissement : Cette leçon correspond au fichier `B6_EquiDirectedProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Rappels :

- La relation même direction s'applique aux couples de points.
- Lorsque les points sont distincts, elle correspond intuitivement à la notion de droites parallèles.
- Par conséquent, sa négation correspondra à la notion de droites sécantes.

12.1 Exercices

- La relation même direction est réflexive et symétrique (ex. 1 et 2).
- La relation même direction ne dépend pas de l'ordre des points dans les couples (ex. 3 et 4).
- La négation (directions différentes) est symétrique et ne dépend pas non plus de l'ordre des points dans les couples (ex. 4, 5 et 6).
- Si les couples ont un point commun, la relation même direction coïncide avec la relation de colinéarité (ex. 7 et 8).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\!\Lsh AB.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D, AB \Rsh\!\Lsh CD \Rightarrow CD \Rsh\!\Lsh AB.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D, AB \Rsh\!\Lsh CD \Rightarrow BA \Rsh\!\Lsh CD.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D, AB \Rsh\!\Lsh CD \Rightarrow AB \Rsh\!\Lsh DC.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D, \neg(AB \Rsh\!\Lsh CD) \Rightarrow \neg(CD \Rsh\!\Lsh AB).$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D, \neg(AB \Rsh\!\Lsh CD) \Rightarrow \neg(BA \Rsh\!\Lsh CD).$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D, \neg(AB \Rsh\!\Lsh CD) \Rightarrow \neg(AB \Rsh\!\Lsh DC)$.

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, AB \Rsh\!\Lsh CA \Rightarrow \overline{ABC}$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, \overline{ABC} \Rightarrow AB \Rsh\!\Lsh CA$.

Livre 3 : La notion de distance

A propos de ce tome : Il peut sembler surprenant de parler de distance sans faire référence à une valeur numérique. Rappelons-nous, la distance dans la géométrie à la règle et au compas fait numériquement appel à l'ensemble des réels constructifs. Ce n'est pas un ensemble facile à construire. En fait, une valeur numérique n'est pas nécessaire. Ici, la distance correspondra à l'écartement des branches du compas et pourra ainsi se transporter en tout point du plan. Pour avoir une définition canonique de l'ouverture du compas, on choisit le point D sur la demi-droite $[OU)$ tel que les deux branches du compas pointent sur O et D. Avec une telle définition, la distance est un point et l'égalité de distance une égalité de points.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 13

Définition de la distance

Avertissement : Cette leçon correspond au fichier C1_Distance.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.

13.1 Définition

Soient A et B deux points du plan. L'intersection du cercle (O, AB) et de son diamètre (OU) (au sens intersection du chapitre 6) est un point M appelé **distance entre** A **et** B.

Notation Lorsque il n'y a pas d'ambiguïté, la *distance* A B est notée AB.

Définition Un point M est une distance s'il appartient à la demi-droite fermée $[OU)$.

13.2 Exercices

- Pour tous points A et B, AB est une distance (ex. 1).
- Pour tous points A et B, les couples (O, AB) et (A, B) sont équidistant (ex. 2).
- Si les couples (A, B) et (C, D) sont équidistants alors la distance de A à B est égale à la distance de C à D et réciproquement (ex. 3 et 4).
- Pour tout point A, la distance de A à A est le point O (distance nulle) (ex. 5).
- Si les points A et B sont confondus, la distance de A à B est O (ex. 6).
- Si les points A et B sont distincts et la distance de A à B égale à la distance de C à D alors C et D sont distincts (ex. 7).
- Si M est une distance, la distance de O à M est M (ex. 8).
- Si les points A et B sont distincts, la distance de A à B n'est pas O et réciproquement (ex. 9 et 10).

- Pour tous points A et B, la distance de A à B est la même que celle de B à A (ex. 11).
- Pour six points $A\ B\ C\ D\ E\ F$ respectant la spécification du triangle (cf leçon 5), si $AB = A'B'$, $CD = C'D'$ et $EF = E'F'$ alors les six points $A'\ B'\ C'\ D'\ E'\ F'$ respectent la spécification du triangle (ex. 12).
- La distance séparant O de U est U (distance unité) (ex. 13).

Ex. 1: $\forall\ A\ B, AB \in [OU)$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B, O(AB) \doteqdot AB$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D, AB \doteqdot CD \Rightarrow AB = CD$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D, AB = CD \Rightarrow AB \doteqdot CD$.

Ex. 5: $\forall\ A, AA = O$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B, A = B \Rightarrow AB = O$.

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow C \neq D$.

Ex. 8: $\forall\ M, M \in [OU) \Rightarrow OM = M$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow AB \neq O$.

Ex. 10: $\forall\ A\ B, AB \neq O \Rightarrow A \neq B$.

Ex. 11: $\forall\ A\ B, AB = BA$.

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F\ A'\ B'\ C'\ D'\ E'\ F',\ \left.\begin{array}{l} \triangle(AB, CD, EF) \wedge \\ AB = A'B' \wedge \\ CD = C'D' \wedge \\ EF = E'F' \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle(A'B', C'D', E'F')$.

Ex. 13: $OU = U$.

13.3 Distance et cercle

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier C2_CircleAndDistance.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.

13.4 Définition

On appelle **rayon** du cercle (C, AB) la distance AB.

Redéfinition L'égalité de distances étant équivalente à l'équidistance on redéfinit l'appartenance au cercle :
un point M appartient au cercle (C, AB) si et seulement si $CM = AB$ (au lieu de $CM \doteqdot AB$).
On reporte cette modification dans la définition de l'intersection d'un cercle avec un de ses diamètres.

Leçon 14

Somme de distances

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier C3_SumDistance.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.

14.1 Définition

M et N étant des points, on appelle somme de M et N la distance P, point d'intersection du cercle de centre m, distance de O à M et de rayon n, distance de O à N avec le diamètre $[OU)$.

Notation $M + N = P$

Remarque : Le segment $[O(M + N)]$ est obtenu par l'aboutement sur $[OU)$ de segments $[Om]$ de longueur OM et $[mP]$ de longueur ON.

14.2 Exercices

- La somme de deux points est une distance (ex. 1).
- La distance de O à $M + N$ est égale à $M + N$ (ex. 2).
- Si M est une distance, le point M appartient au segment $[O(M+N)]$ (ex. 3).
- Si M et N sont des distances, la distance de M à $M + N$ est égale à N (ex. 4).
- Si m est la distance OM, on a $M + N = m + N$ (ex. 5).
- Si n est la distance ON, on a $M + N = M + n$ (ex. 6).

Ex. 1: $\forall\ M\ N, M + N \in [OU)$.

Ex. 2: $\forall\ M\ N\ P, M + N = P \Rightarrow OP = M + N$.

Ex. 3: $\forall\ M\ N, M \in [OU) \Rightarrow M \in [O(M + N)]$.

Ex. 4: $\forall\ M\ N\ P,\ \left.\begin{array}{l} M \in [OU) \wedge \\ N \in [OU) \wedge \\ M + N = P \end{array}\right\} \Rightarrow MP = N.$

Ex. 5: $\forall\ M\ N, M + N = OM + N.$

Ex. 6: $\forall\ M\ N, M + N = M + ON.$

14.3 Relation de Chasles

14.3.1 Enoncé

Etant donnés trois points A, B et C si B appartient au segment $[AC]$, alors $AB + BC = AC$.

14.3.2 Preuve

On applique l'axiome 14 sur les six points O, AB, $(AB + BC)$, A, B, C, les trois premiers étant sur $[OU)$ par définition et les trois derniers sur $[AC]$ par hypothèse.

14.3.3 Réciproque

Etant donnés trois points A, B et C si $AB + BC = AC$ alors B appartient au segment $[AC]$.

14.3.4 Preuve

On applique l'axiome 15 sur les six points O, AB, $(AB + BC)$, A, B, C, les trois premiers étant sur $[OU)$ par définition et AB étant sur le segment $[O(AB + BC)]$ d'après l'exercice 3.

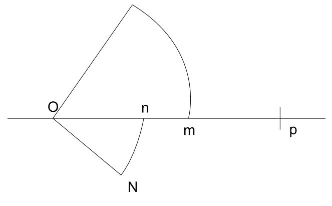
14.4 Propriétés de l'addition des distances

14.4.1 L'addition est commutative

Etant donnés deux points M et N, $M + N = N + M$.

14.4.2 Preuve

Appelons m la distance OM et n la distance ON, par définition ce sont des points de $[OU)$ et $Om = OM$ et $On = ON$.
Appelons p la somme $N+M$, par définition c'est un point de $[OU)$, $Op = N+M$ et $np = Om$.



Appliquons Chasles sur les points p, n et O : $pO = pn + nO$.
Comme $pO = Op = N + M$, $pn = np = Om = OM$ et $nO = On = ON$, il vient $N + M = OM + ON$ et d'après les exercices 5 et 6, $N + M = M + N$.

14.4.3 L'addition est associative

Etant donnés trois points M, N et P, $M + (N + P) = (M + N) + P$.

14.4.4 Preuve

On raisonne de même sur la demi-droite $[OU)$ en utilisant Chasles avec les points $m,\ n,\ p$ tels que $Om = OM$, $mn = ON$, $np = OP$.

14.4.5 O est élément neutre de l'addition

Pour tout point M, $O + M = M$ et $M + O = M$.

14.4.6 Preuve

La première égalité découle de la définition de la somme et la seconde de la première par commutativité.

On en déduit également :

Exercice 7 Si M et N sont des distances telles que $M+N = M$ alors $N = O$.

$$\forall\ M\ N,\ \left.\begin{array}{l} M \in [Ou)\ \wedge \\ N \in [OU)\ \wedge \\ M + N = M \end{array}\right\} \Rightarrow N = O.$$

Leçon 15

Ordre de distances

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier C4_DistanceLe.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.

15.1 Définition

M et N étant des points, on dira que M **est inférieur ou égal à** N si le point M appartient au segment $[ON]$.

Notation $M \leqslant N$

Remarque : Lorsque M et N sont des distances (des points de $[OU)$), cette définition correspond à l'ordre usuel sur les distances.

15.2 Exercices

- L'ordre est réflexif (ex. 1).
- Le point O est inférieur ou égal à tout point (la distance nulle est inférieure ou égale à toute autre) (ex. 2).
- Si C appartient au segment $[AB]$, la distance AC est inférieure ou égale à la distance AB (ex. 3).
- B et C étant deux points d'une demi-droite non dégénérée $[AD)$, si la distance AC est inférieure ou égale à la distance AB alors C appartient au segment $[AB]$ (ex. 4).
- L'ordre des distances est transitif (ex. 5).
- Si A est une distance, pour tout point B on a A inférieur ou égal à $A + B$ (ex. 6, 7 et 8).
- L'ordre des distances est régulier à droite (ex. 8).

Ex. 1: $\forall\ A, A \leqslant A$.

Ex. 2: $\forall\ A, O \leqslant A$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C, C \in [AB] \Rightarrow AC \leqslant AB$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} A \neq D\ \wedge \\ B \in [AD)\ \wedge \\ C \in [AD)\ \wedge \\ AC \leqslant AB \end{array}\right\} \Rightarrow C \in [AB]$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} A \leqslant B\ \wedge \\ B \leqslant C \end{array}\right\} \Rightarrow A \leqslant C$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B, A \in [OU) \Rightarrow A \leqslant A + B$.

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C, AB \leqslant AB + C$.

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, A + B \leqslant (A + B) + C$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, A \leqslant B \Rightarrow C + A \leqslant C + B$.

Leçon 16

L'inégalité triangulaire

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier C5_TriangularInequality.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.
Etant donné l'importance de cette inégalité comme précondition à l'intersection de deux cercles, on va la redéfinir sous une formulation plus usuelle que celle donnée dans l'axiomatisation, en utilisant les notions de distances et d'ordre sur les distances.

16.1 Redéfinitions

- On définit **l'inégalité triangulaire** sur les six points A, B, C, D, E et F comme $EF \leqslant AB + CD$; cette définition est équivalente à celle donné au chapitre 3 (ex. 1 et 2).

- On définit **la spécification du triangle** sur les six points A, B, C, D, E et F comme

$$AB \leqslant CD + EF \ \wedge CD \leqslant EF + AB \ \wedge EF \leqslant AB + CD$$

  cette définition est équivalente à celle donnée au chapitre 5 (du fait de l'équivalence précédente).

- On dira que les deux cercles (C_1, A_1B_1) et (C_2, A_2B_2) sont **sécants** si les centres C_1 et C_2 sont distincts et si les points A_1, B_1, A_2, B_2, C_1 et C_2 respectent la spécification du triangle; cette définition est équivalente à celle donné au chapitre 5 (du fait de l'équivalence précédente).

Notations Par souci de simplicité, on conservera les notations $\triangle(AB, CD, EF)$ et $(C_1, A_1B_1) \between (C_2, A_2B_2)$. (Les définitions Coq sont nécessairement nommées différement).

16.2 Exercices

- Etant donnés trois points A, B et C, les distances AB, BC et AC verifient les inégalités triangulaires (ex. 3 à 10).

- Etant donnés trois points A, B et C, les distances AB, BC et AC verifient la spécification du triangle (ex. 11 à 18).
- Si les six points A, B, C, D, E et F respectent la spécification du triangle, si les six points A', B', C', D', E' et F' sont tels que $AB = A'B'$, $CD = C'D'$ et $EF = E'F'$ alors ils respectent eux aussi la spécification du triangle (ex. 19).
- Si les cercles γ_1 et γ_2 sont sécants alors γ_2 et γ_1 sont sécants (on utilise la commutativité de l'addition des distances) (ex. 20).
- Si les cercles γ_1 et γ_2 sont sécants alors on sait construire un unique point M appartenant aux deux cercles tel que les trois points: centre de γ_2, M, centre de γ_1 ne sont pas dextrogyres (on change la précondition par une condition équivalente dans la définition d'intersection de cercles du chapitre 6) (ex. 21).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, EF \leqslant AB + CD \Rightarrow \exists\ G\ H\ I, \left\{ \begin{array}{l} H \in [GI] \wedge \\ GH \doteqdot AB \wedge \\ HI \doteqdot CD \wedge \\ \exists\ J, \left\{ \begin{array}{l} J \in [GI] \wedge \\ GJ \doteqdot EF. \end{array} \right. \end{array} \right.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \exists\ G\ H\ I, \left\{ \begin{array}{l} H \in [GI] \wedge \\ GH \doteqdot AB \wedge \\ HI \doteqdot CD \wedge \\ \exists\ J, \left\{ \begin{array}{l} J \in [GI] \wedge \\ GJ \doteqdot EF \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow EF \leqslant AB + CD.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C, AC \leqslant AB + BC.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C, CA \leqslant AB + BC.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C, AC \leqslant AB + CB.$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C, CA \leqslant AB + CB.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C, AC \leqslant BA + BC.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, CA \leqslant BA + BC.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, AC \leqslant BA + CB.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C, CA \leqslant BA + CB.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C, \triangle(AB, BC, AC).$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C, \triangle(AB, BC, CA).$

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C, \triangle(AB, CB, AC).$

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C, \triangle(AB, CB, CA).$

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C, \triangle(BA, BC, AC).$

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C, \triangle(BA, BC, CA).$

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C, \triangle(BA, CB, AC).$

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C, \triangle(BA, CB, CA).$

Ex. 19: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F\ A'\ B'\ C'\ D'\ E'\ F', \left.\begin{array}{l} \triangle(AB, CD, EF) \wedge \\ AB = A'B' \wedge \\ CD = C'D' \wedge \\ EF = E'F' \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle(A'B', C'D', E'F').$

Ex. 20: $\forall\ \gamma_1\ \gamma_2, \gamma_1 \between \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \between \gamma_1.$

Ex. 21: $\forall\ \gamma_1\ \gamma_2, \gamma_1 \between \gamma_2 \Rightarrow \exists!\ M, \left\{\begin{array}{l} M \in \gamma_1 \wedge \\ M \in \gamma_2 \wedge \\ \not\circlearrowright (\odot\gamma_2) M (\odot\gamma_1) \end{array}\right.$

Leçon 17

Le produit d'une distance par un entier naturel

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier C6_DistanceTimesN.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.
On a vu que toute l'axiomatisation avait été faite sans le secours d'une notion externe. Toutefois, la formulation usuelle de la propriété d'Archimède sur les distances se formule couramment en utilisant le produit d'une distance par un entier. C'est ce que nous allons faire ici en utilisant un ensemble des naturels défini par ailleurs (les naturels de Coq sont définis inductivement par deux constructeurs : O et S).

17.1 Définitions

A et B étant deux points, on définit le **produit** de l'entier n sur AB par récurrence :

- si $n = 0$, c'est le point O
- si M_n est le produit de AB par n, le produit de AB par $n+1$ est $M_{n+1} = M_n + AB$.

Notations $M_n = n * AB$.

Remarque : Le point M_n est le point de $[OU)$ obtenu par aboutement successifs de la distance AB.

17.2 Exercices

- Quels que soient les points A et B, le produit de AB par un entier est une distance (ex. 1).
- Le produit par un entier est indépendant de l'ordre des points (ex. 2).
- Ce lemme est utilisée dans la preuve du théorème ci-dessous : si un point M est [AB[-accessible, il appartient à la demi-droite fermée $[AB)$ (ex. 3).

Ex. 1: $\forall\ A\ B, \forall\ n, n * AB \in [OU)$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B, \forall\ n, n * AB = n * BA$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ M, [AB[\triangleright M \Rightarrow M \in [AB)$.

17.3 Théorème :

La distance est archimédienne, c'est-à-dire qu'étant donnés deux points distincts A et B, pour tout point C, il existe un entier naturel n tel que $AC \leqslant n * AB$.

Démonstration On raisonne par induction sur l'axiome 17 appliqué aux points O AB et AC:
Il faut vérifier la prémisse $AC \in [O(AB))$. Comme $A \neq B$, la distance AB est un point de $[OU)$ distinct de O et comme AC est une distance c'est un point de $[OU)$, la prémisse est donc satisfaite, il reste à prouver la récurrence.

- le cas de base est :

$$\forall\ C, OC \upharpoonright\upharpoonright C(AB) \Rightarrow \exists\ n, C \leqslant n * AB$$

  Comme AB est une distance donc sur $[OU)$, C est aussi sur $[OU)$, en choisissant $n = 1$, il suffit de montrer que $C \in [O(AB)]$, ce qui se déduit de $OC \upharpoonright\upharpoonright C(AB)$.

- le cas général est :

$$\forall\ C\ D, \left.\begin{array}{l} DC \upharpoonright\upharpoonright O(AB) \wedge \\ AB = DC \wedge \\ [AB[\triangleright D \wedge \\ \exists\ p, D \leqslant p * AB \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\ n, C \leqslant n * AB$$

On choisit $n = p + 1$, il faut montrer $C \leqslant (p * AB) + AB$. Comme $AB = CD$, il vient $C = AB + D$ d'après Chasles. En substituant C, il reste à prouver que $AB + D \leqslant (p * AB) + AB$, et donc par les propriétés de l'addition $D \leqslant p * AB$, que nous avons par hypothèse.

Livre 4 : La seconde dimension

A propos de ce tome : Grâce à l'intersection de cercles, il va être possible de construire un triangle équilatéral sur la base de deux points distincts, et donc de disposer d'un troisième point dextrogyre avec les deux premiers. Plusieurs propriétés, certaines très basiques, se déduisent de l'existence de cette seconde dimension dans le plan.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 18

Le point d'intersection de deux cercles sécants

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier D1_IntersectionCirclesProp.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.

18.1 Définition

Si les cercles γ_1 et γ_2 sont sécants, on sait construire le **point d'intersection des cercles** défini par l'axiome 20 appliqué à l'intersection des cercles γ_1 et γ_2.

Notation $\gamma_1 \mathbin{\dot\cap} \gamma_2$.

18.2 Exercices

- Le point d'intersection des cercles γ_1 et γ_2 appartient à γ_1 et à γ_2 (ex. 1 et 2).
- Le centre de γ_2, le point d'intersection des cercles γ_1 et γ_2 et le centre de γ_1 sont trois points qui ne sont pas dextrogyres (ex. 3).
- Tout point M qui appartient à γ_1 et γ_2 et tel que le centre de γ_2, M et le centre de γ_1 ne sont pas dextrogyres est égal au point d'intersection des cercles γ_1 et γ_2 (ex. 4).
- Deux points M et N qui appartiennent à γ_1 et γ_2 et tels que ni le centre de γ_2, M et le centre de γ_1 ni le centre de γ_2, M et le centre de γ_1 ne sont dextrogyres sont égaux (ex. 5).
- A et B étant deux points distincts, si deux points M et N sont tels que $AM = AN$, $BM = BN$, (A, M, B) et (A, N, B) ne sont pas dextrogyres, ils sont égaux (ex. 6).

Ex. 1: $\forall\ \gamma_1\ \gamma_2, \gamma_1 \between \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \mathbin{\dot\cap} \gamma_2 \in \gamma_1$.

Ex. 2: $\forall\ \gamma_1\ \gamma_2, \gamma_1 \between \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \mathbin{\dot{\cap}}\ \gamma_2 \in \gamma_2.$

Ex. 3: $\forall\ \gamma_1\ \gamma_2, \gamma_1 \between \gamma_2 \Rightarrow \varnothing\ (\odot\gamma_2)(\gamma_1 \mathbin{\dot{\cap}}\ \gamma_2)(\odot\gamma_1).$

Ex. 4: $\forall\ M, \forall\ \gamma_1\ \gamma_2,\ \left.\begin{array}{l} \gamma_1 \between \gamma_2\ \wedge \\ M \in \gamma_1\ \wedge \\ M \in \gamma_2\ \wedge \\ \varnothing\ (\odot\gamma_2)M(\odot\gamma_1) \end{array}\right\} \Rightarrow M = \gamma_1 \mathbin{\dot{\cap}}\ \gamma_2.$

Ex. 5: $\forall\ M\ N, \forall\ \gamma_1\ \gamma_2,\ \left.\begin{array}{l} \gamma_1 \between \gamma_2\ \wedge \\ M \in \gamma_1\ \wedge \\ M \in \gamma_2\ \wedge \\ \varnothing\ (\odot\gamma_2)M(\odot\gamma_1)\ \wedge \\ N \in \gamma_1\ \wedge \\ N \in \gamma_2\ \wedge \\ \varnothing\ (\odot\gamma_2)N(\odot\gamma_1) \end{array}\right\} \Rightarrow M = N.$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ M\ N,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ AM = AN\ \wedge \\ BM = BN\ \wedge \\ \varnothing\ AMB\ \wedge \\ \varnothing\ ANB \end{array}\right\} \Rightarrow M = N.$

Leçon 19

Le troisième point dextrogyre avec deux points

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier D2_ExistsClockwise.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.

19.1 Définition

Etant donnés deux points A et B distincts, le point C intersection des cercles (A, AB) et (B, AB) est le **troisième point dextrogyre avec A et B**.

Notation $\binom{\circlearrowright}{AB} = (A, AB) \cap (B, AB)$

Remarque Il va d'abord falloir montrer que les cercles (A, AB) et (B, AB) sont sécants, cf ex. 1 et 2.

19.2 Exercices

- Pour tous points A et B distincts, A B A B A B vérifient l'inégalité triangulaire et donc la spécification du triangle (ex. 1 et 2).
- Pour tous points A et B distincts, le troisième point dextrogyre avec A et B n'est pas sur $]AB)$ (sinon ce serait le point B ce qui est impossible) (ex. 3).
- Pour tous points A et B distincts, le troisième point dextrogyre avec A et B n'est pas sur $]BA)$ (sinon ce serait le point A) (ex. 4).
- Pour tous points A et B distincts, les trois points A, B et le troisième point dextrogyre avec A et B ne sont pas dextrogyres (par construction) (ex. 5).
- Pour tous points A et B distincts, les trois points A, le troisième point dextrogyre avec A et B et B sont dextrogyres (seul cas possible en appliquant l'axiome 5) (ex. 6).

Ex. 1: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow AB \leqslant AB + AB$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow \triangle(AB, AB, AB)$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow \binom{\circlearrowright}{AB} \notin]AB)$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow \binom{\circlearrowright}{AB} \notin]BA)$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow \not\circlearrowright AB\binom{\circlearrowright}{AB}$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow \circlearrowright A\binom{\circlearrowright}{AB}B$.

Leçon 20

La seconde dimension

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier D3_SecondDimension.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.
La possibilité de construire d'un point dextrogyre avec deux points distincts va permettre de prouver plusieurs propriétés restées jusqu'à présent non établies.

20.1 Exercices

- Si A et B sont distincts, tout point C de $]AB)$ est distinct de A (ex. 1).
- Tout point B entre A et C est distinct de C (ex. 2).
- La relation entre est symétrique (ex. 3).
- Si B est entre A et C, A est distinct de C (ex. 4).
- Si B est entre A et C, B appartient à la demi-droite $]CA)$ (ex. 5).
- Si B est entre A et C et C est entre B et D alors C est entre A et D (ex. 6).
- Si B est entre A et C et C est entre A et D alors C est entre B et D (ex. 7).
- Si B est entre A et C et C est entre A et D alors B est entre A et D (ex. 8).
- (séparabilité des points) Si A et B sont distincts, tout point C est distinct de A ou de B (ex. 9).
- Si A et B sont distincts, si (A, B) a même orientation que (C, D) ou si $AB = CD$ alors C est distinct de D (ex. 10 et 15).
- Si B est entre A et C, tout point M dextrogyre avec l'un des couples (A, B), (A, C) et (B, C) l'est avec les autres (ex. 11 à 13).
- Si le point A est entre B et C, il est entre tout point de $]AB)$ et tout point de $]AC)$ (ex. 14).

- Si A et B sont distincts, si C appartient à $]AB)$ ou $AB = AC$ ou (A, B) a même orientation que (A, C) alors A est distinct de C (ex. 16).
- Si (A, B) a même orientation que (C, D) alors
  - A, B, C sont colinéaires si B, C, D sont colinéaires ou A, B, D sont colinéaires ou A, C, D sont colinéaires (ex. 17, 18, 19 et 29),
  - A, B, D sont colinéaires si A, B, C sont colinéaires ou A, C, D sont colinéaires ou B, C, D sont colinéaires (ex. 20, 21, 22 et 30),
  - A, C, D sont colinéaires si B, C, D sont colinéaires ou A, B, C sont colinéaires et A distinct de B ou A, B, D sont colinéaires et A distinct de B (ex. 23, 24, 25 et 31),
  - B, C, D sont colinéaires si A, C, D sont colinéaires ou A, B, C sont colinéaires et A distinct de B ou A, B, D sont colinéaires et A distinct de B (ex. 26, 27, 28 et 32).
- Si A et B sont deux points d'une droite l, alors ils ont soit même orientation que les points de constructions de la droite l soit l'orientation contraire (ex. 33).
- Si A, B et C sont trois points d'une droite l, alors ces trois points sont colinéaires (ex. 34).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ C \in]AB) \end{array}\right\} \Rightarrow A \neq C.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow B \neq C.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow C - B - A.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow A \neq C.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow B \in]CA).$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C\ \wedge B - C - D \Rightarrow A - C - D.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C\ \wedge A - C - D \Rightarrow B - C - D.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C\ \wedge A - C - D \Rightarrow A - B - D.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, A \neq B \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \neq C \vee \\ B \neq C. \end{array}\right.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ AB \Rsh\Rsh CD \end{array}\right\} \Rightarrow C \neq D.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A - B - C \wedge \\ (\circlearrowright ABM \vee \\ \circlearrowright ACM) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright BCM.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A - B - C \wedge \\ (\circlearrowright ABM \vee \\ \circlearrowright BCM) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright ACM.$

Ex. 13: $$\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A - B - C \wedge \\ (\circlearrowright ACM \vee \\ \ \circlearrowright BCM) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright ABM.$$

Ex. 14: $$\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} B - A - C \wedge \\ D \in]AB) \wedge \\ E \in]AC) \end{array}\right\} \Rightarrow D - A - E.$$

Ex. 15: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (AB \upuparrows CD \ \vee \ AB = CD) \end{array}\right\} \Rightarrow C \neq D.$$

Ex. 16: $$\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (C \in]AB) \vee \\ \ AB = AC \vee \\ \ AB \upuparrows AC) \end{array}\right\} \Rightarrow A \neq C.$$

Ex. 17: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ \overline{BCD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABC}.$$

Ex. 18: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ \overline{ABD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABC}.$$

Ex. 19: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ \overline{ACD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABC}.$$

Ex. 20: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ \overline{BCD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABD}.$$

Ex. 21: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABD}.$$

Ex. 22: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ \overline{ACD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABD}.$$

Ex. 23: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ \overline{BCD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ACD}.$$

Ex. 24: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ACD}.$$

Ex. 25: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ \overline{ABD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ACD}.$$

Ex. 26: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ \overline{ACD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BCD}.$$

Ex. 27: $$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upuparrows CD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BCD}.$$

Ex. 28: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upharpoonright\upharpoonright CD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ \overline{ABD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BCD}.$

Ex. 29: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upharpoonright\upharpoonright CD \wedge \\ (\overline{BCD} \vee \\ \ \overline{ABD} \vee \\ \ \overline{ACD}) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABC}.$

Ex. 30: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upharpoonright\upharpoonright CD \wedge \\ (\overline{BCD} \vee \\ \ \overline{ABC} \vee \\ \ \overline{ACD}) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABD}.$

Ex. 31: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upharpoonright\upharpoonright CD \wedge \\ (\overline{BCD} \vee \\ \ (A \neq B\ \wedge \overline{ABC}) \vee \\ \ (A \neq B\ \wedge \overline{ABD})) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ACD}.$

Ex. 32: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} AB \upharpoonright\upharpoonright CD \wedge \\ (\overline{ACD} \vee \\ \ (A \neq B\ \wedge \overline{ABC}) \vee \\ \ (A \neq B\ \wedge \overline{ABD})) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BCD}.$

Ex. 33: $\forall\ A\ B, \forall\ l,\ \left.\begin{array}{l} A \in l \wedge \\ B \in l \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AB \upharpoonright\upharpoonright l^{\triangleright} l^{\triangleleft} \vee \\ AB \upharpoonright\upharpoonright l^{\triangleleft} l^{\triangleright}. \end{array}\right.$

Ex. 34: $\forall\ A\ B\ C, \forall\ l,\ \left.\begin{array}{l} A \in l \wedge \\ B \in l \wedge \\ C \in l \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ABC}.$

Leçon 21

L'inégalité stricte de distance

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier D4_DistanceLt.v de la contribution EuclidianGeometry de Coq.

21.1 Définition

On dira que le point M est **strictement inférieur** au point N s'il est inférieur ou égal à N et distinct de N.

Notation $M < N$

Remarque Comme pour inférieur ou égal, la relation est définie sur tous les points du plan, mais elle ne sera utilisée que sur les distances, c'est-à-dire les points de la demi-droite $[OU)$.

21.2 Exercices

- A étant une distance et B un point distinct de O, la distance A est strictement inférieure à la somme de A et de B (ex. 1).
- Si B est entre A et C, la distance AB est strictement inférieure à la distance AC (ex. 2).
- Réciproquement, si la distance AB est strictement inférieure à la distance AC et que les points A et B sont distincts et le point C sur la demi-droite $]AB)$ alors B est entre A et C (ex. 3).
- A et B étant deux points distincts, si A est inférieur ou égal à B alors B n'est pas inférieur ou égal à A (ex. 4).
- La relation strictement inférieur est transitive avec la relation inférieur ou égal (ex. 5).

- Si A est distinct de B alors pour tout point C, il existe un entier naturel n non nul tel que la distance AC soit strictement inférieure à n fois la distance AB (ex. 6) (version stricte de la propriété du plan d'être archimédien).

Ex. 1: $\forall\ A\ B,\ \left.\begin{array}{l} B \neq O \wedge \\ A \in [OU) \end{array}\right\} \Rightarrow A < A + B.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C, A - B - C \Rightarrow AB < AC.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} AB < AC \wedge \\ A \neq B \wedge \\ C \in]AB) \end{array}\right\} \Rightarrow A - B - C.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ A \leqslant B \end{array}\right\} \Rightarrow \neg B \leqslant A.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A \leqslant B \wedge \\ B < C \end{array}\right\} \Rightarrow A < C.$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C, A \neq B \Rightarrow \exists n, \left\{\begin{array}{l} n > O \wedge \\ AC < n * AB. \end{array}\right.$

Livre 5 : Droites sécantes

A propos de ce tome : On s'attachera dans ce tome à décrire différentes méthodes d'établir que deux droites sont sécantes et à en déduire des propriétés relatives au point d'intersection obtenu.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 22

Le point d'intersection de droites sécantes

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `E1_IntersectionLineProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

22.1 Définition

On appelle **point d'intersection de droites sécantes** δ_1 et δ_2, l'unique point construit par l'axiome 20 satisfaisant l'intersection $\delta_1 \Cap \delta_2$ (on rappelle qu'une intersection est une propriété des points).

Notation On note ce point $\delta_1 \cap\!\!\cdot\ \delta_2$.

22.2 Exercices

- Le point d'intersection des droites sécantes δ_1 et δ_2 est un point de δ_1 et de δ_2 (conséquence de l'axiome 20) (ex. 1 et 2).
- Tout point commun aux droites sécantes δ_1 et δ_2 est égal au point d'intersection des droites δ_1 et δ_2 (ex. 3).
- Deux points communs aux droites sécantes δ_1 et δ_2 sont égaux (ex. 4).
- Si les droites δ_1 et δ_2 sont sécantes alors les droites δ_2 et δ_1 sont sécantes (ex. 5).

Ex. 1: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \nparallel \delta_2 \Rightarrow \delta_1 \cap\!\!\cdot\ \delta_2 \in \delta_1$.

Ex. 2: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \nparallel \delta_2 \Rightarrow \delta_1 \cap\!\!\cdot\ \delta_2 \in \delta_2$.

Ex. 3: $\forall\ M, \forall\ \delta_1\ \delta_2,\ \left.\begin{array}{l} \delta_1 \nparallel \delta_2\ \wedge \\ M \in \delta_1\ \wedge \\ M \in \delta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow M = \delta_1 \cap\!\!\cdot\ \delta_2$.

Ex. 4: $$\forall\ M\ N, \forall\ \delta_1\ \delta_2,\ \left.\begin{array}{l} \delta_1 \nparallel \delta_2\ \wedge \\ M \in \delta_1\ \wedge \\ M \in \delta_2\ \wedge \\ N \in \delta_1\ \wedge \\ N \in \delta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow M = N.$$

Ex. 5: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \nparallel \delta_2 \Rightarrow \delta_2 \nparallel \delta_1.$

Leçon 23

Le point défini par deux couples de points n'ayant pas la même direction

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `E2_NotEquidirectedIntersection.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

23.1 Définition

On appelle **point d'intersection défini par deux couples de points n'ayant pas la même direction** (A, B) et (C, D), le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Remarque Il faut d'abord remarquer que si les deux couples de points (A, B) et (C, D) n'ont pas la même direction, alors A est distinct de B (ex. 1) et que C est distinct de D (ex. 2) donc les droites (AB) et (CD) existent et par définition sont sécantes.

Notation $(A, B) \Cap (C, D)$.

23.2 Exercices

- Si les deux couples de points (A, B) et (C, D) n'ont pas la même direction, alors le point d'intersection est aligné avec A et B (ex. 3).

- Si les deux couples de points (A, B) et (C, D) n'ont pas la même direction, alors le point d'intersection est aligné avec C et D (ex. 4).

- Si les deux couples de points (A, B) et (C, D) n'ont pas la même direction, tout point aligné avec A et B et aligné avec C et D est égal au point d'intersection défini par (A, B) et (C, D) (ex. 5).

- Si les deux couples de points (A, B) et (C, D) n'ont pas la même direction, deux points alignés avec A et B et alignés avec C et D sont égaux (ex. 6).
- Si les points A, B et C ne sont pas colinéaires, tout point aligné avec A et B et aligné avec A et C est égal à A (ex. 7).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D, \neg(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D) \Rightarrow A \neq B.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D, \neg(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D) \Rightarrow C \neq D.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D, \neg(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D) \Rightarrow \overline{AB((A, B) \dot{\cap} (C, D))}.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D, \neg(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D) \Rightarrow \overline{CD((A, B) \dot{\cap} (C, D))}.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D\ M,\ \left.\begin{array}{l} \neg(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D)\ \wedge \\ \overline{ABM}\ \wedge \\ \overline{CDM} \end{array}\right\} \Rightarrow M = (A, B) \dot{\cap} (C, D).$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D\ M\ N,\ \left.\begin{array}{l} \neg(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D)\ \wedge \\ \overline{ABM}\ \wedge \\ \overline{CDM}\ \wedge \\ \overline{ABN}\ \wedge \\ \overline{CDN} \end{array}\right\} \Rightarrow M = N.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ M,\ \left.\begin{array}{l} \neg\overline{ABC}\ \wedge \\ \overline{ABM}\ \wedge \\ \overline{ACM} \end{array}\right\} \Rightarrow A = M.$

23.3 Théorème

Si les points (A, B, C) sont dextrogyres et les points (A, B, D) ne le sont pas alors les couples (A, B) et (C, D) n'ont pas la même direction.

Enoncé

$$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC\ \wedge \\ \not\circlearrowright ABD \end{array}\right\} \Rightarrow \neg(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D).$$

Démonstration On raisonne par l'absurde en supposant $(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D)$.
On note d'abord que $B \neq C$.
On distingue deux cas :

- Si $\circlearrowright BAD$.
  La définition de même direction est une disjonction de huit cas de même direction, pour chaque cas, on a une contradiction entre les deux hypothèses de points dextrogyres.
- Si $\overline{ABD}$.
  On montre alors que $\overline{ABC}$ en décomposant de même l'hypothèse $(A, B) \Rsh\!\Lsh (C, D)$ en huit cas.
  La contradiction avec l'hypothèse $\circlearrowright ABC$ est alors patente.

Remarque Ce théorème est souvent utilisé lorsque l'on veut construire le point d'intersection de (A, B) et (C, D).

Leçon 24

Le point défini par deux orientations

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `E3_FourPointsIntersection.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

24.1 Définition

On appelle **point d'intersection défini par deux orientations** (A, B, C) dextrogyre et (A, B, D) sinistrogyre, le point d'intersection des droites (AB) et (CD).

Notation $(\circlearrowright ABC) \Cap (\circlearrowright BAD)$.

Remarque Cette définition diffère de celle de la leçon précédente par le fait que ni C ni D ne peuvent être alignés avec A et B. Cette définition est donc moins générale, mais elle ajoute une propriété utile, le point construit est situé entre C et D. Cette propriété est l'objet du théorème suivant. Enfin, cette intersection nous permettra d'énoncer et de démontrer le théorème de Pasch.

24.2 Théorème

Etant donné deux points C et D situé de part et d'autre d'une droite (AB), le point E commun aux droites (AB) et (CD) est situé entre C et D.

Enoncé

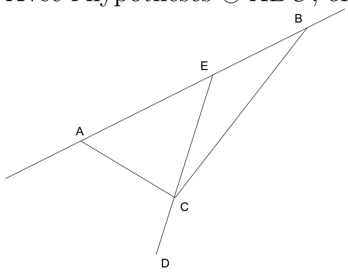
$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \wedge \\ \circlearrowright BAD \wedge \\ \overline{ABE} \wedge \\ \overline{CDE} \end{array}\right\} \Rightarrow C - E - D.$$

Preuve E étant colinéaires avec C et D, on distingue trois cas selon la position de E par rapport à C et D.

- E appartient à $[CD]$.
  Comme E est distinct de C sinon on aurait à la fois $\circlearrowright ABC$ et $\overline{ABC}$, comme de même E est distinct de D sinon on aurait à la fois $\circlearrowright BAD$ et $\overline{ABD}$, on en déduit $C - E - D$.

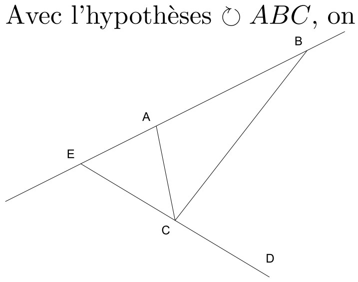
- C appartient à $[DE]$.
  On montre que $\circlearrowright ABD$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Pour cela, on raisonne encore par cas selon la position relative des trois points alignés A, B et E :

  – E appartient à $[AB]$.
    Avec l'hypothèses $\circlearrowright ABC$, on obtient la figure suivante :



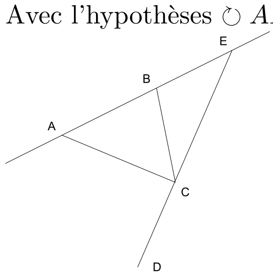
    Puisque $\circlearrowright ABC$, il en est de même pour $\circlearrowright AEC$, puis pour $\circlearrowright AED$ et enfin pour $\circlearrowright ABD$ (l'assertion $A \neq E$ sera nécessaire dans la première déduction, elle s'établit aisément par l'absurde).

  – A appartient à $[BE]$.
    Avec l'hypothèses $\circlearrowright ABC$, on obtient la figure suivante :



    Puisque $\circlearrowright ABC$, il en est de même pour $\circlearrowright EBC$, puis pour $\circlearrowright EBD$ et enfin pour $\circlearrowright ABD$.

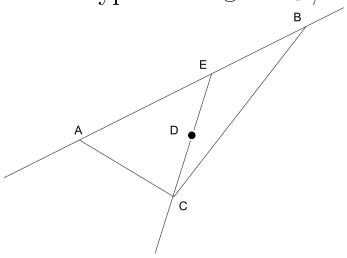
  – B appartient à $[EA]$.
    Avec l'hypothèses $\circlearrowright ABC$, on obtient la figure suivante :



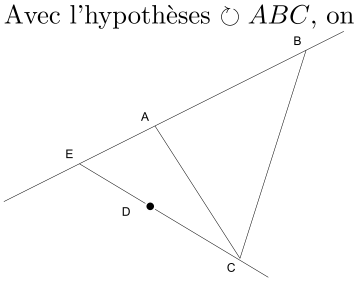
    Puisque $\circlearrowright ABC$, il en est de même pour $\circlearrowright AEC$, puis pour $\circlearrowright AED$ et enfin pour $\circlearrowright ABD$.

- D appartient à $[EC]$.
  De même on montre que $\circlearrowright ABD$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Pour cela, on raisonne encore par cas selon la position relatve des trois points alignés A, B et E :

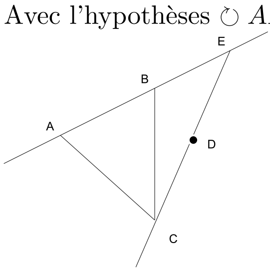
  - E appartient à $[AB]$.
    Avec l'hypothèses $\circlearrowright ABC$, on obtient la figure suivante :

    Puisque $\circlearrowright ABC$, il en est de même pour $\circlearrowright AEC$, puis pour $\circlearrowright AED$ et enfin pour $\circlearrowright ABD$ (l'assertion $E \neq D$ sera nécessaire dans la deuxième déduction, elle s'établit aisément et l'assertion $A \neq E$ nécessaire dans la première déduction s'établit par l'absurde).
  - A appartient à $[BE]$.
    Avec l'hypothèses $\circlearrowright ABC$, on obtient la figure suivante :

    Puisque $\circlearrowright ABC$, il en est de même pour $\circlearrowright EBC$, puis pour $\circlearrowright EBD$ et enfin pour $\circlearrowright ABD$ (l'assertion $E \neq D$ sera nécessaire dans la deuxième déduction, elle s'établit aisément).
  - B appartient à $[EA]$.
    Avec l'hypothèses $\circlearrowright ABC$, on obtient la figure suivante :

    Puisque $\circlearrowright ABC$, il en est de même pour $\circlearrowright AEC$, puis pour $\circlearrowright AED$ et enfin pour $\circlearrowright ABD$ (l'assertion $E \neq D$ sera nécessaire dans la deuxième déduction, elle s'établit aisément).

24.3 Exercices

- Si (A, B, C) est dextrogyre et (A, B, D) sinistrogyre, alors le point d'intersection est aligné avec A et B (ex. 1).

- Si (A, B, C) est dextrogyre et (A, B, D) sinistrogyre, alors le point d'intersection est entre C et D (ex. 2).

- Si (A, B, C) est dextrogyre et (A, B, D) sinistrogyre, tout point aligné avec A et B et aligné avec C et D est égal au point d'intersection défini par les deux orientations (A, B, C) et (A, B, D) (ex. 3).

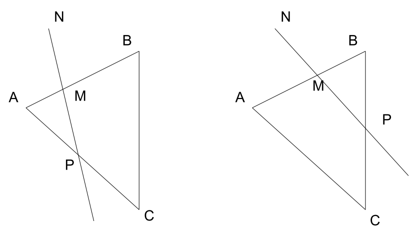
$$\text{Ex. 1: } \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \wedge \\ \circlearrowright BAD \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB((\circlearrowright ABC) \mathbin{\dot{\cap}} (\circlearrowright BAD))}.$$

$$\text{Ex. 2: } \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \wedge \\ \circlearrowright BAD \end{array}\right\} \Rightarrow C - (\circlearrowright ABC) \mathbin{\dot{\cap}} (\circlearrowright BAD) - D.$$

$$\text{Ex. 3: } \forall\ A\ B\ C\ D\ M,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \wedge \\ \circlearrowright BAD \wedge \\ \overline{ABM} \wedge \\ \overline{CDM} \end{array}\right\} \Rightarrow M = (\circlearrowright ABC) \mathbin{\dot{\cap}} (\circlearrowright BAD).$$

24.4 Théorème de Pasch

Etant donnés trois points A, B, C dextrogyres, un point M entre A et B et un point N tel que M et N ne soient alignés ni avec A, ni avec B, ni avec C alors il existe un point P colinéaire avec M et N situé entre A et C ou entre B et C.



Enoncé

$$\forall\ A\ B\ C\ M\ N,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \wedge \\ A - M - B \wedge \\ \neg\overline{AMN} \wedge \\ \neg\overline{BMN} \wedge \\ \neg\overline{CMN} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists P, \overline{MNP}\ \wedge A - P - C \vee \\ \exists P, \overline{MNP}\ \wedge B - P - C. \end{array}\right.$$

Démonstration Puisque M et N ne sont alignés ni avec A, ni avec B, on distingue quatre cas :

- $\circlearrowright AMN$ et $\circlearrowright BMN$.
  Impossible puisque $A - M - B$.

- $\circlearrowright AMN$ et $\circlearrowright MBN$.
  Puisque M et N ne sont pas alignés avec C, on distingue deux cas :

  - $\circlearrowright CMN$.
    le point P d'intersection défini par les deux orientations $\circlearrowright MNC$ et $\circlearrowright NMB$ répond à la question; il est aligné avec M et N et entre B et C (deuxième cas).
  - $\circlearrowright MCN$.
    le point P d'intersection défini par les deux orientations $\circlearrowright MNA$ et $\circlearrowright NMC$ répond à la question; il est aligné avec M et N et entre A et C (premier cas).

- $\circlearrowright MAN$ et $\circlearrowright BMN$.
  Puisque M et N ne sont pas alignés avec C, on distingue deux cas :
  - $\circlearrowright CMN$.
    le point P d'intersection défini par les deux orientations $\circlearrowright MNC$ et $\circlearrowright NMA$ répond à la question; il est aligné avec M et N et entre A et C (premier cas).
  - $\circlearrowright MCN$.
    le point P d'intersection défini par les deux orientations $\circlearrowright MNB$ et $\circlearrowright NMC$ répond à la question; il est aligné avec M et N et entre B et C (deuxième cas).

- $\circlearrowright MAN$ et $\circlearrowright MBN$.
  Impossible puisque $A - M - B$.

Livre 6 : Intersection d'un cercle avec un diamètre

A propos de ce tome : Le fait de pouvoir reporter des distances avec le compas sur une droite autorise plusieurs constructions différentes.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 25

Le point d'intersection d'un cercle et d'un diamètre

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `E3_IntersectionDiameterProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

25.1 Définition

On appelle **point d'intersection d'un cercle** γ **et d'un diamètre** δ, l'unique point construit par l'axiome 20 satisfaisant l'intersection $\delta \Cap \gamma$.

Notation $\delta \mathbin{\frown\!\!\!\!\cdot\,} \gamma$.

Remarque Cette définition présuppose que δ est un diamètre de γ.

25.2 Exercices

- Le point d'intersection du cercle γ avec le diamètre δ est tel que le bipoint formé du centre du cercle et du point d'intersection a même orientation que le bipoint $(\delta^{\triangleright}, \delta^{\triangleleft})$ (ex. 1).
- Le point d'intersection du cercle γ avec le diamètre δ appartient à γ (ex. 2) et δ (ex. 3).
- La distance séparant le centre du cercle γ avec le point d'intersection du cercle γ avec le diamètre δ est égale au rayon de γ (ex. 4).
- (DE) étant un diamètre du cercle (C, AB), tout point M de ce cercle tel que (C, M) a même orientation que (D, E) est égal au point d'intersection du cercle avec le diamètre (ex. 5).
- (DE) étant un diamètre du cercle (C, AB), tous points M et N de ce cercle tel que (C, M) et (C, N) ont même orientation que (D, E) sont égaux (ex. 6).

Ex. 1: $\forall\ \delta, \forall\ \gamma, \delta \oslash \gamma \Rightarrow (\odot\gamma)(\delta \capdot\ \gamma) \Rsh\Rsh\ \delta^{\rhd}\delta^{\lhd}$.

Ex. 2: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \delta \oslash \gamma \Rightarrow \delta \capdot\ \gamma \in \gamma$.

Ex. 3: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \delta \oslash \gamma \Rightarrow \delta \capdot\ \gamma \in \delta$.

Ex. 4: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \delta \oslash \gamma \Rightarrow (\odot\gamma)(\delta \capdot\ \gamma) = \rho_\gamma$.

Ex. 5: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \forall\ M, \left.\begin{array}{l} \delta \oslash \gamma \wedge \\ M \in \gamma \wedge \\ (\odot\gamma)M \Rsh\Rsh\ \delta^{\rhd}\delta^{\lhd} \end{array}\right\} \Rightarrow M = \delta \capdot\ \gamma$.

Ex. 6: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \forall\ M\ N, \left.\begin{array}{l} \delta \oslash \gamma \wedge \\ M \in \gamma \wedge \\ (\odot\gamma)M \Rsh\Rsh\ \delta^{\rhd}\delta^{\lhd} \wedge \\ N \in \gamma \wedge \\ (\odot\gamma)N \Rsh\Rsh\ \delta^{\rhd}\delta^{\lhd} \end{array}\right\} \Rightarrow M = N$.

25.3 Second point d'intersection d'un cercle et d'un diamètre

Définition On appelle **second point d'intersection d'un cercle** (C, AB) **et d'un diamètre** (DE), le point d'intersection du cercle (C, AB) et du diamètre (ED).

Notation $(C, AB) \capdot (DE)$.

Remarque Cette définition suppose que l'on a su démontrer lors de la construction que si (DE) est un diamètre, (ED) est aussi un diamètre.

25.4 Exercices

- Le second point d'intersection du cercle (C, AB) avec le diamètre (DE) est tel que le bipoint formé du centre du cercle et du point d'intersection a même orientation que le bipoint (E, D) (ex. 7).

- Le second point d'intersection du cercle γ avec le diamètre δ appartient à γ (ex. 8) et δ (ex. 9).

- La distance séparant le centre du cercle γ avec le second point d'intersection du cercle γ avec le diamètre δ est égale au rayon de γ (ex. 10).

- (DE) étant un diamètre du cercle (C, AB), tout point M de ce cercle tel que (C, M) a même orientation que (E, D) est égal au second point d'intersection du cercle avec le diamètre (ex. 11).

- (DE) étant un diamètre du cercle (C, AB), tous points M et N de ce cercle tel que (C, M) et (C, N) ont même orientation que (E, D) sont égaux (ex. 12).

- (DE) étant un diamètre du cercle (C, AB), tout point M appartenant au cercle et au diamètre est le point d'intersection du cercle avec le diamètre ou le second point d'intersection du cercle avec le diamètre (ex. 13).

Ex. 7: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \forall\ M, \delta \oslash \gamma \Rightarrow (\odot\gamma)(\gamma \mathbin{\dot\cap}\ \delta) \Rsh\Rsh\ \delta^{\triangleleft}\delta^{\triangleright}.$

Ex. 8: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \delta \oslash \gamma \Rightarrow \gamma \mathbin{\dot\cap}\ \delta \in \gamma.$

Ex. 9: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \delta \oslash \gamma \Rightarrow \gamma \mathbin{\dot\cap}\ \delta \in \delta.$

Ex. 10: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \forall\ M, \delta \oslash \gamma \Rightarrow (\odot\gamma)(\gamma \mathbin{\dot\cap}\ \delta) = \rho_{\gamma}.$

Ex. 11: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \forall\ M,\ \left.\begin{array}{l} \delta \oslash \gamma\ \wedge \\ M \in \gamma\ \wedge \\ (\odot\gamma)M \Rsh\Rsh\ \delta^{\triangleleft}\delta^{\triangleright} \end{array}\right\} \Rightarrow M = \gamma \mathbin{\dot\cap}\ \delta.$

Ex. 12: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \forall\ M\ N,\ \left.\begin{array}{l} \delta \oslash \gamma\ \wedge \\ M \in \gamma\ \wedge \\ (\odot\gamma)M \Rsh\Rsh\ \delta^{\triangleleft}\delta^{\triangleright}\ \wedge \\ N \in \gamma\ \wedge \\ (\odot\gamma)N \Rsh\Rsh\ \delta^{\triangleleft}\delta^{\triangleright} \end{array}\right\} \Rightarrow M = N.$

Ex. 13: $\forall\ \gamma, \forall\ \delta, \forall\ M,\ \left.\begin{array}{l} \delta \oslash \gamma\ \wedge \\ M \in \gamma\ \wedge \\ M \in \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M = \delta \mathbin{\dot\cap}\ \gamma\ \vee \\ M = \gamma \mathbin{\dot\cap}\ \delta. \end{array}\right.$

Leçon 26

Constructions de points sur une droite

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `F2_MarkSegment.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

26.1 Définitions

On appelle

- **report** de la distance DE sur la droite (AB) (dans le sens de A vers B) à partir du point C (de la droite (AB)) le point d'intersection du cercle (C, DE) avec le diamètre (AB).

- **marque** de la distance CD sur la droite (AB) (dans le sens de A vers B à partir de A) le point d'intersection du cercle (A, CD) avec le diamètre (AB).

- **contre-marque** de la distance CD sur la droite (AB) (dans le sens de B vers A à partir de A) le point d'intersection du cercle (A, CD) avec le diamètre (BA).

- **symétrique** du point A par rapport au point B (les points A et B sont distincts) le point d'intersection du cercle (B, AB) avec le diamètre (AB).

Notations

- $\frac{C-DE}{AB}$

- $\frac{A-CD}{AB}$

- $\frac{A-CD}{BA}$

- $\frac{B-AB}{AB}$

26.2 Propriétés du report

Exercices

- Le couple de points formé de C et du report de DE sur (AB) à partir de C a même orientation que le bipoint (A, B) (ex. 1).
- La distance séparant C du report de DE sur (AB) à partir de C est égale à DE (ex. 2).
- Le report de DE sur (AB) à partir de C est colinéaire avec A et B (ex. 3).
- C étant un point de (AB), tout point M tel que (C, M) a même orientation que (A, B) et tel que la distance CM est égale à DE est égal au report de DE sur (AB) à partir de C (ex. 4).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \land \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow C\tfrac{C-DE}{AB} \upuparrows AB.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \land \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow C\tfrac{C-DE}{AB} = DE.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \land \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB\tfrac{C-DE}{AB}}.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \land \\ \overline{ABC}\ \land \\ CM \upuparrows AB\ \land \\ CM = DE \end{array}\right\} \Rightarrow M = \tfrac{C-DE}{AB}.$

26.3 Propriétés de la marque

Exercices

- La marque de CD sur (AB) appartient à la demi-droite $[AB)$ (ex. 5).
- La distance séparant A de la marque de CD sur (AB) est égale à CD (ex. 6).
- Tout point M de $[AB)$ tel que la distance AM est égale à CD est égal à la marque de CD sur (AB) (ex. 7).

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D, A \neq B \Rightarrow \tfrac{A-CD}{AB} \in [AB).$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D, A \neq B \Rightarrow A\tfrac{A-CD}{AB} = CD.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \land \\ M \in [AB)\ \land \\ AM = CD \end{array}\right\} \Rightarrow M = \tfrac{A-CD}{AB}.$

26.4 Propriétés de la contre-marque

Exercices

- Le point A appartient au segment borné par la contre-marque de CD sur (AB) et B (ex. 8).
- La distance séparant A de la contre-marque de CD sur (AB) est égale à CD (ex. 9).
- Tout point M tel que A appartient au segment $[BM]$ tel que la distance AM est égale à CD est égal à la contre-marque de CD sur (AB) (ex. 10).

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C\ D, A \neq B \Rightarrow A \in [\frac{A-CD}{BA} B]$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C\ D, A \neq B \Rightarrow A\frac{A-CD}{BA} = CD$.

Ex. 10: $$\forall\ A\ B\ C\ D\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ A \in [BM]\ \wedge \\ AM = CD \end{array}\right\} \Rightarrow M = \frac{A-CD}{BA}.$$

26.5 Propriétés du symétrique

Exercices

- Le point B est entre le point A et le symétrique de A par rapport à B (ex. 11).
- Les points A et B sont distincts du symétrique de A par rapport à B (ex. 12 et 13).
- La distance séparant B du symétrique de B par rapport à A est égale à AB (ex. 14).
- A étant distinct de B, tout point M tel que (A, B) la même orientation que (B, M) et tel que la distance BM est égale à AB est égal au symétrique de A par rapport à B (ex. 15).

Ex. 11: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow A - B - \frac{B-AB}{AB}$.

Ex. 12: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow B \neq \frac{B-AB}{AB}$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow A \neq \frac{B-AB}{AB}$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C\ D, A \neq B \Rightarrow B\frac{B-AB}{AB} = AB$.

Ex. 15: $$\forall\ A\ B\ C\ D\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ AB \upuparrows BM\ \wedge \\ BM = AB \end{array}\right\} \Rightarrow M = \frac{B-AB}{AB}.$$

26.6 Théorème

Lemme préliminaire Etant donné deux points A et B, s'il existe un point I distinct de A alors si la distance AB est nulle, les points A et B sont confondus.

Enoncé

$$\forall\ A\ B\ I,\ \left.\begin{array}{r} I \neq A\ \wedge \\ AB = O \end{array}\right\} \Rightarrow A = B.$$

Démonstration La droite (IA) existe car $I \neq A$ et le point A appartient à la droite (IA), le report de la distance AA sur la droite (IA) à partir de A est donc une construction possible.
On montre que A est égal à ce report en utilisant l'exercice 4.
On montre que B est égal à ce report en utilisant l'exercice 4. Pour montrer la condition d'orientation $AB \Rsh\!\Rsh IA$, on revient à la définition d'orientation similaire et l'on suppose donc l'existence d'un point M qui satisfait l'hypothèse $\circlearrowright ABM$, le but étant $\circlearrowright IAM$. Mais cette hypothèse entraine $A \neq B$ (ex. 6 de la leçon 7) et donc $AB \neq O$ (ex. 9 de la leçon 13) ce qui est impossible car $AB = O$. Donc l'implication est vérifiée (la prémisse n'est jamais vraie). L'égalité de distance est immédiate.

Théorème Deux points à distance nulle sont égaux.

Enoncé $\forall\ A\ B, AB = O \Rightarrow A = B.$

Démonstration On utilisera le théorème précédent dans lequel I sera soit O soit U.

Conséquence Si la distance CD ajoutée à la distance AB est égale à la distance AB alors les points C et D sont égaux (ex. 16 et 17)

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C\ D, AB + CD = AB \Rightarrow C = D.$

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C\ D, CD + AB = AB \Rightarrow C = D.$

Leçon 27

Graduation d'une droite

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `F3_Graduation.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.
Par reports successifs, il est possible de graduer une droite avec la distance séparant ses points de construction comme distance unité.

27.1 Définition

On appelle **nième graduation** sur la droite (AB) le point M_n défini par récurrence sur n :

- M_0 est le point A
- M_{n+1} est le report de la distance AB à partir de M_n sur la droite (AB).

Notation

$$M_n = {}^{A}B_n$$

Remarque Puisque l'on parle de droite (AB), la propriété $A \neq B$ est implicite mais nécessaire.

27.2 Propriétés des graduations

Exercices

- La graduation 0 est égale à A (ex. 1).
- La graduation 1 est égale à B (ex. 2).
- Toute graduation de (AB) est colinéaire avec A et B (ex. 3).
- La distance séparant deux graduations successives de (AB) est égale à AB (ex. 4).
- Le bipoint formé de deux graduations successives de (AB) a même orientation que (A, B) (ex. 5).

- La $n+1^{\text{ième}}$ graduation de (AB) est le report sur (A, B) à partir de la $n^{\text{ième}}$ graduation de (AB) de la distance AB (ex. 6).
- Deux graduations successives de (AB) sont distinctes (ex. 7).
- Etant données trois graduations successives de (AB), la seconde est située entre la première et la troisième (ex. 8).
- Toute graduation de (AB) appartient à la demi-droite fermée $[AB)$ (ex. 9).
- La $n^{\text{ième}}$ graduation de (AB) appartient au segment fermé ayant pour extrémités A et la $n+1^{\text{ième}}$ graduation (ex. 10).

Ex. 1: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_0 = A$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_1 = B$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow \overline{AB\,{}^{A}B_n}$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_n\,{}^{A}B_{n+1} = AB$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_n\,{}^{A}B_{n+1} \upuparrows AB$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_{n+1} = \dfrac{{}^{A}B_n - AB}{AB}$.

Ex. 7: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_n \neq {}^{A}B_{n+1}$.

Ex. 8: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_n - {}^{A}B_{n+1} - {}^{A}B_{n+2}$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_n \in [AB)$.

Ex. 10: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_n \in [A, {}^{A}B_{n+1}]$.

27.3 Propriétés avec le produit d'une distance par un entier

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `F4_ArchimedianDistance.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.
Il s'agit de propriétés utiles ultérieurement et se concluant par le calcul de la distance séparant A et la nième graduation de (AB).

Exercices

- B appartient au segment fermé ayant pour extrémités A et la $n+1^{\text{ième}}$ graduation de (AB) (ex. 11).
- Si $n \geqslant 1$, la $n^{\text{ième}}$ graduation de (AB) est entre A et la $n+1^{\text{ième}}$ graduation (ex. 12).

- La $n+1^{\text{ième}}$ graduation de (AB) appartient au segment fermé ayant pour extrémités B et la $n+2^{\text{ième}}$ graduation (ex. 13).
- La distance séparant A de la $n^{\text{ième}}$ graduation de (AB) est égale à la distance séparant B de la $n+1^{\text{ième}}$ graduation de (AB) (ex. 14) (indication: on utilisera la relation de Chasles).
- La distance séparant A de la $n^{\text{ième}}$ graduation de (AB) est égale à n fois la distance AB (ex. 15).

Ex. 11: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow B \in [A, {}^{A}B_{n+1}]$.

Ex. 12: $\forall\ A\ B, \forall\ n, \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ n \geqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A - {}^{A}B_{n} - {}^{A}B_{n+1}$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow {}^{A}B_{n+1} \in [B, {}^{A}B_{n+2}]$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow A\,{}^{A}B_{n} = B\,{}^{A}B_{n+1}$.

Ex. 15: $\forall\ A\ B, \forall\ n, A \neq B \Rightarrow A\,{}^{A}B_{n} = n * AB$.

Livre 7 : Les angles

A propos de ce tome : On s'attachera dans ce tome à définir la notion d'angle (de demi-droite non orienté). Comme nous avions défini la distance en reportant l'écartement du compas sur la demi-droite $[OU)$, nous allons définir l'angle en le reportant au compas sur le cercle unité (O, OU). Un angle sera donc un point du demi-cercle unité.

Il est facile de rajouter l'orientation puisque celle-ci est une notion primitive. Le fait d'avoir des angles non orientés va permettre d'énoncer facilement les "cas d'égalités des triangles" de la géométrie euclidienne plane.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 28

Angles

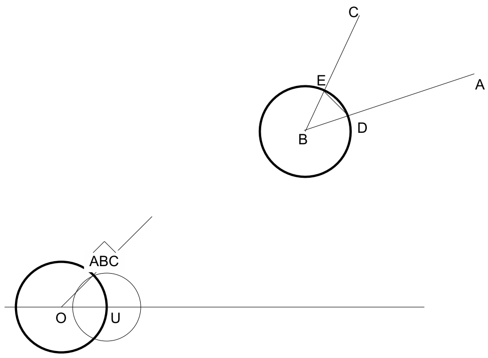
Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `G1_Angles.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

28.1 Définition

Etant donnés trois points A, B et C avec A et C distincts de B, on appelle angle ABC le point intersection du cercle unité et du cercle de centre U et de rayon DE où D est le point d'intersection de la demi-droite $[BA)$ avec le cercle (B, OU) et E le point d'intersection de $[BC)$ avec (B, OU).

Notation $\angle ABCHbaHbc$

Figure



Remarques

- Hba et Hbc sont des preuves de $B \neq A$ et $B \neq C$.
- L'angle étant un point du cercle unité, l'égalité d'angle sera définie par l'égalité de points.

Définition On dira qu'un point est un angle s'il appartient au cercle unité et n'appartient pas au demi-plan ↱ OU.

Notation On utilisera une lettre grecque pour désigner un point qui est un angle et l'on notera $\angle\alpha$ la propriété pour le point α d'être un angle.

28.2 Propriétés des angles

Exercices

- La distance séparant O de $\angle ABCHbaHbc$ est l'unité (ex. 1).
- Les trois points U, $\angle ABCHbaHbc$ et O ne sont pas dextrogyres (ex. 2).
- La distance séparant U de $\angle ABCHbaHbc$ est celle séparant la marque de la distance unité sur la droite (BA) et la marque de la distance unité sur la droite (BC) (ex. 3).
- Si α est un angle, la distance séparant O de α est l'unité (ex. 4).
- L'angle $\angle ABCHbaHbc$ est un angle (ex. 5).
- Si α est un angle, il est égal à l'angle $\angle UO\alpha HouHo\alpha$ (ex. 6).
- Si α est un angle, il est distinct de O (ex. 7).
- Si α et β sont deux angles à même distance de U, ils sont égaux (ex. 8).
- D étant un point de $]AB)$ et E un point de $]AC)$, les angles $\angle BACHabHac$ et $\angle EADHaeHad$ sont égaux (ex. 9).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow O(\angle ABCHbaHbc) = U.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow \not\circlearrowleft U(\angle ABCHbaHbc)O.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow U(\angle ABCHbaHbc) = \frac{B-OU}{BA}\frac{B-OU}{BC}.$

Ex. 4: $\forall\ \alpha, \angle\alpha \Rightarrow O\alpha = U.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow \angle(\angle ABCHbaHbc).$

Ex. 6: $\forall\ \alpha, \angle\alpha \Rightarrow \angle UO\alpha HouHo\alpha = \alpha.$

Ex. 7: $\forall\ \alpha, \angle\alpha \Rightarrow \alpha \neq O.$

Ex. 8: $\forall\ \alpha\ \beta,\ \left.\begin{array}{l} \angle\alpha\ \wedge \\ \angle\beta\ \wedge \\ U\alpha = U\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} Hab : A \neq B\ \wedge \\ Hac : A \neq C\ \wedge \\ Had : A \neq D\ \wedge \\ Hae : A \neq E\ \wedge \\ D \in]AB)\ \wedge \\ E \in]AC) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BACHabHac = \angle EADHaeHad.$

28.3 Congruence d'angles

Avertissement : Comme on vient de le voir, parler d'un angle $\widehat{ABC}$ exige de disposer des preuves que $B \neq A$ et que $B \neq C$, mais les angles restent égaux lorsque l'on change de preuve. Afin d'alléger les énoncés et les démonstrations, on introduit la notion de congruence.

Définition On dira que les points (A, B, C) et (D, E, F) **définissent des angles congruents** (ou par abus de langage que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congruents) si $Hba : B \neq A$, $Hbc : B \neq C$, $Hed : E \neq D$, $Hef : E \neq F$ et $\angle ABCHbaHbc = \angle DEFHedHef$.

Notation $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$.

Exercices

- Si (A, B, C) et (D, E, F) définissent des angles congruents, alors $B \neq A$, $B \neq C$, $E \neq D$ et $E \neq F$ (ex. 10 à 13).
- La relation de congruence d'angle est une relation d'équivalence sur les triplets de points (A, B, C) vérifiant $B \neq A$ et $B \neq C$. (ex. 14 à 16).
- La relation de congruence d'angle est inchangée lorsque l'on permute les sommets extrémités des angles. (ex. 17 à 20).
- Quelles que soient les preuves de $Hba : B \neq A$, $Hbc : B \neq C$, $Hed : E \neq D$ et $Hef : E \neq F$ permettant de définir les angles $\angle ABCHbaHbc$ et $\angle DEFHedHef$, si (A, B, C) et (D, E, F) définissent des angles congruents, alors les angles sont égaux (ex. 21).
- Si $Hba : B \neq A$ et $Hbc : B \neq C$, alors les six points A, B, C, U, O et $\angle ABCHbaHbc$ définissent des angles congruents (ex. 22).
- Si $B \neq A$ et $B \neq C$, on obtient des angles congruents en échangeant l'extrémité A (respectivement C) par un autre point de la demi-droite $]BA)$ (respectivement $]BC)$) (ex. 23 à 25).

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \Rightarrow B \neq A.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \Rightarrow B \neq C.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \Rightarrow E \neq D.$

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \Rightarrow E \neq F.$

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} B \neq A\ \wedge \\ B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABC}.$

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{ABC}.$

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}\ \wedge \\ \widehat{DEF} \equiv \widehat{GHI} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{GHI}.$

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{CBA} \equiv \widehat{DEF}$.

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{FED}$.

Ex. 19: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{CBA} \equiv \widehat{FED}$.

Ex. 20: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} B \neq A\ \wedge \\ B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{CBA}$.

Ex. 21: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C\ \wedge \\ Hed : E \neq D\ \wedge \\ Hef : E \neq F\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABCHbaHbc = \angle DEFHedHef$.

Ex. 22: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv UO(\angle \widehat{ABCH}baHbc)$.

Ex. 23: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} B \neq A\ \wedge \\ B \neq C\ \wedge \\ D \in]BA) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{DBC}$.

Ex. 24: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} B \neq A\ \wedge \\ B \neq C\ \wedge \\ D \in]BC) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABD}$.

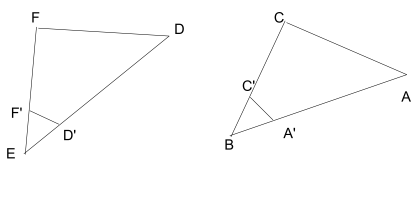
Ex. 25: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} B \neq A\ \wedge \\ B \neq C\ \wedge \\ D \in]BA)\ \wedge \\ E \in]BC) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{DBE}$.

28.4 Théorèmes

Lorsque nous avions donné une description intuitive des axiomes 18 et 19 de métrique (leçon 3), nous avions mentionné la notion d'angle. Ces axiomes trouvent désormais une formulation plus usuelle dans les théorèmes suivants.

Théorème Side-Angle-Side Etant donnés six points (A, B, C) et (D, E, F) définissant des angles congruents, si $BA = ED$ et $BC = EF$ alors $AC = DF$.

Figure



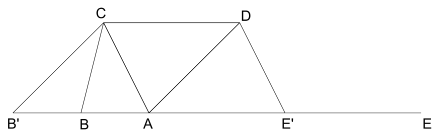
Démonstration On revient à la définition des angles en construisant les points A', C', D' et F' respectivement sur $]BA)$, $]BC)$, $]ED)$ et $]EF)$ à distance unité de B pour les deux premiers et de E pour les deux derniers. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBE}$ étant égaux par hypothèse, les distances $A'C'$ et $D'F'$ sont égales.

En appliquant l'axiome 18 sur les points $B, A', C', A, E, D', F', D$, il vient $AC' = DF'$.
En appliquant de nouveau l'axiome 18 sur les points B, C', A, C, E, F', D, F, il vient $AC = DF$.

Théorème Side-Side-Side Etant donnés six points (A, B, C) et (D, E, F) tels que $B \neq A$, $B \neq C$, $E \neq D$, $E \neq F$, si $BA = ED$, $BC = EF$ et $AC = DF$ alors ces points définissent des angles congruents.

Démonstration On construit de même les points A', C', D' et F' respectivement sur $]BA)$, $]BC)$, $]ED)$ et $]EF)$ à distance unité de B pour les deux premiers et de E pour les deux derniers (même figure).
En appliquant l'axiome 18 sur les points B, C, A, C', E, F, D, F', il vient $AC' = DF'$.
En appliquant de nouveau l'axiome 18 sur les points $B, A, C', A', E, D, F', D'$, il vient $A'C' = D'F'$. On en déduit par définition des angles que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBE}$ sont égaux et donc que les six points définissent des angles congruents.

Théorème de la somme des angles d'un triangle Etant donnés trois triplets (A, B, C), (A, C, D) et (A, D, E) dextrogyres, si les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont congruents ainsi que $\widehat{DAE}$ et $\widehat{ADC}$ alors le point A est situé entre B et E.

Figure 

Démonstration On construit B', marque de la distance CD sur (AB) et E', marque de CD sur (AE). On a $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'AC}$ et $\widehat{DAE} \equiv \widehat{DAE'}$.
En appliquant le théorème side-angle-side aux points B', A, C, A, C et D, il vient $B'C = AD$. De même avec les points E', A, D, A, D et C, on obtient $DE' = CA$.
En appliquant l'axiome 19 aux points A, B', C, D et E', on en déduit que A est entre B' et E'. Grâce aux propriétés de la relation entre (leçon 11), on en déduit que A est situé entre B et E.

Leçon 29

Propriétés des angles

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `G2_AngleProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

29.1 Exercices

- Si $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DAB}$ sont congruents et que les triplets (A, C, B) et (A, D, B) ne sont pas dextrogyres, si les distances AC et AD sont égales alors les points C et D sont égaux (on utilisera le théorème side-angle-side) (ex. 1).

- De même, si $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAD}$ sont congruents et que les triplets (A, B, C) et (A, B, D) ne sont pas dextrogyres, si les distances AC et AD sont égales alors les points C et D sont égaux (ex. 2).

- Si $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DAB}$ sont congruents et que les triplets (A, C, B) et (A, D, B) ne sont pas dextrogyres, alors le point D appartient à la demi-droite $]AC)$ (on utilisera l'exercice 1 en construisant la marque de distance AC sur (AD)) (ex. 3).

- De même, si $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAD}$ sont congruents et que les triplets (A, B, C) et (A, B, D) ne sont pas dextrogyres, alors le point D appartient à la demi-droite $]AC)$ (ex. 4).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{CAB} \equiv \widehat{DAB} \wedge \\ \not\circlearrowleft ACB \wedge \\ \not\circlearrowleft ADB \wedge \\ AC = AD \end{array}\right\} \Rightarrow C = D.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{BAC} \equiv \widehat{BAD} \wedge \\ \not\circlearrowleft ABC \wedge \\ \not\circlearrowleft ABD \wedge \\ AC = AD \end{array}\right\} \Rightarrow C = D.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\widehat{CAB} \equiv \widehat{DAB} \wedge \\ \not\emptyset\ ACB \wedge \\ \not\emptyset\ ADB\end{array}\right\} \Rightarrow D \in]AC).$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\widehat{BAC} \equiv \widehat{BAD} \wedge \\ \not\emptyset\ ABC \wedge \\ \not\emptyset\ ABD\end{array}\right\} \Rightarrow D \in]AC).$

Leçon 30

Angles particuliers

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `G3_ParticularAngle.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

30.1 Angle nul

Définition On dira qu'un angle est nul s'il est congru à $\widehat{UOU}$.

Notation $\widehat{ABC} \equiv \widehat{U}$

30.2 Exercices

- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est nul, l'angle $\widehat{CBA}$ l'est aussi (ex. 1).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est nul, les points A et C sont distincts de B (ex. 2 et 3).
- Si A est distinct de B et si C est sur la demi-droite $]AB)$ alors l'angle $\widehat{BAC}$ est nul (ex. 4).
- Réciproquement, si l'angle $\widehat{BAC}$ est nul alors C est sur la demi-droite $]AB)$ (ex. 5).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est nul et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congrus, alors l'angle $\widehat{DEF}$ est nul (ex. 6).
- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont nuls, alors ils sont congrus (ex. 7).
- Le point U est un angle et tout angle nul est égal à ce point (ex. 8 à 10)

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U} \Rightarrow \widehat{CBA} \equiv \widehat{U}$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U} \Rightarrow B \neq A$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U} \Rightarrow B \neq C$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ C \in]AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{U}.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{BAC} \equiv \widehat{U} \Rightarrow C \in]AB).$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{U}\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{U}.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{U}\ \wedge \\ \widehat{DEF} \equiv \widehat{U} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}.$

Ex. 8: $\angle U$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{U} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABCHbaHbc = U.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C\ \wedge \\ \angle ABCHbaHbc = U \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{U}.$

30.3 Angle plat

Définition On appelle U' le symétrique de U par rapport à O.

Définition On dira qu'un angle est plat s'il est congru à $\widehat{UOU'}$.

Notation $\widehat{ABC} \equiv \widehat{U'}$

30.4 Exercices

- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est plat, l'angle $\widehat{CBA}$ l'est aussi (ex. 11).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est plat, les points A et C sont distincts de B (ex. 12 et 13).
- U' est le second point d'intersection du cercle unité avec la droite (OU), il est à distance unité de O, O est compris entre U et U', U' est distinct de O et de U, enfin U' est un angle (ex. 14 à 19).
- Si A est entre B et C est alors l'angle $\widehat{BAC}$ est plat et réciproquement (il faut revenir à la définition d'angle et utiliser Chasles) (ex. 20 et 21).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est plat et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congrus, alors l'angle $\widehat{DEF}$ est plat (ex. 22).
- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont plats, alors ils sont congrus (ex. 23).
- Tout angle plat est égal à U' et réciproquement (ex. 24 et 25).

- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congrus, alors si A, B et C sont colinéaires, D, E et F le sont aussi (on raisonne par cas selon la position des trois points A, B et C en montrant que dans chaque cas l'angle $\widehat{ABC}$ est nul ou plat) (ex. 26).

- Tout angle nul n'est pas plat et réciproquement (ex. 27 et 28).

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'} \Rightarrow \widehat{CBA} \equiv \widehat{U'}$.

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'} \Rightarrow B \neq A$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'} \Rightarrow B \neq C$.

Ex. 14: $U' = (O, OU) \Cap (OU)$.

Ex. 15: $OU' = U$

Ex. 16: $U - O - U'$

Ex. 17: $O \neq U'$

Ex. 18: $U \neq U'$

Ex. 19: $\angle U'$

Ex. 20: $\forall\ A\ B\ C, B - A - C \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{U'}$.

Ex. 21: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{BAC} \equiv \widehat{U'} \Rightarrow B - A - C$.

Ex. 22: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'} \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{U'}$.

Ex. 23: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'} \wedge \\ \widehat{DEF} \equiv \widehat{U'} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$.

Ex. 24: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A \wedge \\ Hbc : B \neq C \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABCHbaHbc = U'$.

Ex. 25: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A \wedge \\ Hbc : B \neq C \wedge \\ \angle ABCHbaHbc = U' \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'}$.

Ex. 26: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \overline{ABC} \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{DEF}$.

Ex. 27: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U} \Rightarrow \widehat{ABC} \not\equiv \widehat{U'}$.

Ex. 28: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'} \Rightarrow \widehat{ABC} \not\equiv \widehat{U}$.

Livre 8 : Les triangles

A propos de ce tome : Nous allons retrouver dans ce tome, l'une des notions les plus fécondes de la géométrie plane, la figure du triangle et en particulier, la congruence des triangles.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 31

Triangles

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `H1_Triangles.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

31.1 Triangles et triangles congruents

Définition On appelle **triangle** tout triplet de points.

Notation $\overset{\triangle}{ABC}$.
Parfois on désignera le triangle par son nom (par exemple t) et non par ses sommets : $\overset{\triangle}{t}$.

Définition On dira que les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont **congrus** si les distances AB et DE, BC et EF, CA et FD sont égales deux à deux (*premier cas d'égalité des triangles dit SSS*).

Notation $\overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF}$.

31.2 Exercices

- La congruence des triangles est symétrique et transitive (ex. 1 et 2).
- Si les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congrus, il en va de même des triangles $\overset{\triangle}{BCA}$ et $\overset{\triangle}{EFD}$ et des triangles $\overset{\triangle}{BAC}$ et $\overset{\triangle}{EDF}$ (ex. 3 et 4).
- Si les trois côtés sont égaux deux deux à deux, les triangles sont congrus et réciproquement (ex. 5 à 8).
- Si les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congrus, si B et C sont distincts de A et E et F de D alors les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{FDE}$ sont congrus (ex. 9).

- Si les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congrus, si A et C sont distincts de B et D et F de E alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congrus (ex. 10).

- Si les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congrus, si A et B sont distincts de C et D et E de F alors les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{EFD}$ sont congrus (ex. 11).

- (*Deuxième cas d'égalité des triangles dit SAS*) Si les distances AB et DE sont égales ainsi que les distances BC et EF, si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congrus alors les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congrus (on utilisera le théorème side-angle-side) (ex. 12).

- Si les distances CA et FD sont égales, si les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{FDE}$ sont congrus ainsi que les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{EFD}$, si A, B, C est dextrogyre alors les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congrus (on construira l'intersection des cercles (A, DE) et (C, FE) et l'on montrera que ce point est le point B) (ex. 13).

- (*Troisième cas d'égalité des triangles dit ASA*) Si les distances CA et FD sont égales, si les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{FDE}$ sont congrus ainsi que les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{EFD}$, si A, B, C ne sont pas colinéaires alors les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congrus (on utilisera l'exercice précédent) (ex. 14).

Ex. 1: $\forall\ t_1\ t_2, \overset{\triangle}{t_1}\equiv\overset{\triangle}{t_2}\Rightarrow\overset{\triangle}{t_2}\equiv\overset{\triangle}{t_1}$.

Ex. 2: $\forall\ t_1\ t_2\ t_3, \left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{t_1}\equiv\overset{\triangle}{t_2}\ \wedge\\ \overset{\triangle}{t_2}\equiv\overset{\triangle}{t_3}\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{\triangle}{t_1}\equiv\overset{\triangle}{t_3}$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \overset{\triangle}{ABC}\equiv\overset{\triangle}{DEF}\Rightarrow\overset{\triangle}{BCA}\equiv\overset{\triangle}{EFD}$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \overset{\triangle}{ABC}\equiv\overset{\triangle}{DEF}\Rightarrow\overset{\triangle}{BAC}\equiv\overset{\triangle}{EDF}$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \left.\begin{array}{l}AB = DE\ \wedge\\ BC = EF\ \wedge\\ CA = FD\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{\triangle}{ABC}\equiv\overset{\triangle}{DEF}$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \overset{\triangle}{ABC}\equiv\overset{\triangle}{DEF}\Rightarrow AB = DE$.

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \overset{\triangle}{ABC}\equiv\overset{\triangle}{DEF}\Rightarrow BC = EF$.

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \overset{\triangle}{ABC}\equiv\overset{\triangle}{DEF}\Rightarrow CA = FD$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \left.\begin{array}{l}A\neq B\ \wedge\\ A\neq C\ \wedge\\ D\neq E\ \wedge\\ D\neq F\ \wedge\\ \overset{\triangle}{ABC}\equiv\overset{\triangle}{DEF}\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{CAB}\equiv\widehat{FDE}$.

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} B \neq A \wedge \\ B \neq C \wedge \\ E \neq D \wedge \\ E \neq F \wedge \\ \overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} C \neq A \wedge \\ C \neq B \wedge \\ F \neq D \wedge \\ F \neq E \wedge \\ \overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD}.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} AB = DE \wedge \\ BC = EF \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF}.$

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \wedge \\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{FDE} \wedge \\ \widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD} \wedge \\ CA = FD \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF}.$

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \neg\overline{ABC} \wedge \\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{FDE} \wedge \\ \widehat{BCA} \equiv \widehat{EFD} \wedge \\ CA = FD \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF}.$

Leçon 32

Triangles particuliers

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `H2_ParticularTriangles.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

32.1 Triangles non dégénérés

Définition On dira qu'un triangle est **non dégénéré** si le triplet de ses sommets est dextrogyre ou sinistrogyre (donc non alignés).

Notation $\overset{\triangle^*}{ABC}$.

32.2 Exercices

- Un triangle congruent à un triangle non dégénéré est non dégénéré (ex. 1).
- Un triangle non dégénéré a ses sommets distincts (ex. 2 à 4).

Ex. 1: $\forall\ t_1\ t_2, \left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{t_1} \equiv \overset{\triangle}{t_2}\ \wedge \\ \overset{\triangle^*}{t_1} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle^*}{t_2}.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle^*}{ABC} \Rightarrow A \neq B.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle^*}{ABC} \Rightarrow B \neq C.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle^*}{ABC} \Rightarrow C \neq A.$

32.3 Triangles isocèles

Définitions On dira qu'un triangle est **isocèle** en A (respectivement en B ou en C) si les côtés AB et AC sont égaux (respectivement BC et BA ou CA et CB).

Notations Respectivement : $\overset{\triangle}{\dot{A}BC}$, $\overset{\triangle}{A\dot{B}C}$, $\overset{\triangle}{AB\dot{C}}$.

Remarque Contrairement à l'usage mathématique qui veut que l'on désigne le sommet par son nom, les définitions *Coq* repèreront le sommet par lequel le triangle est isocèle par sa position (on dira isocèle-1, isocèle-2, isocèle-3). Toutefois dans les énoncés ci-dessous, on conserve l'usage mathématique, mais la notation adoptée fait bien référence à la position par le sommet pointé.

32.4 Exercices

- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en A, il en est de même du triangle $\overset{\triangle}{ACB}$ (ex. 5).
- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en B, il en est de même du triangle $\overset{\triangle}{CBA}$ (ex. 6).
- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en C, il en est de même du triangle $\overset{\triangle}{BAC}$ (ex. 7).
- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en A, le triangle $\overset{\triangle}{CAB}$ est isocèle en A (ex. 8).
- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en B, le triangle $\overset{\triangle}{CAB}$ est isocèle en B (ex. 9).
- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en C, le triangle $\overset{\triangle}{CAB}$ est isocèle en C (ex. 10).
- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en A et a tous ses sommets distincts, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont congrus (ex. 11).
- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en B et a tous ses sommets distincts, les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BAC}$ sont congrus (ex. 12).
- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en C et a tous ses sommets distincts, les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ sont congrus (ex. 13).
- Si les trois points A, B, et C ne sont pas colinéaires et si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont congrus alors le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en A (ex. 14).
- Si les trois points A, B, et C ne sont pas colinéaires et si les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BAC}$ sont congrus alors le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en B (ex. 15).
- Si les trois points A, B, et C ne sont pas colinéaires et si les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CBA}$ sont congrus alors le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est isocèle en C (ex. 16).

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle}{\dot{A}BC} \Rightarrow \overset{\triangle}{\dot{A}CB}$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle}{A\dot{B}C} \Rightarrow \overset{\triangle}{C\dot{B}A}$.

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle}{AB\dot{C}} \Rightarrow \overset{\triangle}{BA\dot{C}}$.

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle}{\dot{A}BC} \Rightarrow \overset{\triangle}{C\dot{A}B}$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle}{A\dot{B}C} \Rightarrow \overset{\triangle}{CA\dot{B}}$.

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C, \overset{\triangle}{AB\dot{C}} \Rightarrow \overset{\triangle}{\dot{C}AB}$.

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ B \neq C\ \wedge \\ C \neq A\ \wedge \\ \overset{\triangle}{\dot{A}BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$.

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ B \neq C\ \wedge \\ C \neq A\ \wedge \\ \overset{\triangle}{A\dot{B}C} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BCA} \equiv \widehat{BAC}$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ B \neq C\ \wedge \\ C \neq A\ \wedge \\ \overset{\triangle}{AB\dot{C}} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} \neg\overline{ABC}\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{\dot{A}BC}$.

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} \neg\overline{ABC}\ \wedge \\ \widehat{BCA} \equiv \widehat{BAC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{A\dot{B}C}$.

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} \neg\overline{ABC}\ \wedge \\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\dot{C}}$.

32.5 Triangles équilatéraux

Définition On dira qu'un triangle est **équilatéral** si tous ses côtés sont égaux.

Notation $\overset{\triangle}{\dot{A}\dot{B}\dot{C}}$.

32.6 Exercices

- Si le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ est équilatéral, il en est de même du triangle $\overset{\triangle}{ACB}$ et du triangle $\overset{\triangle}{BCA}$ (ex. 17 et 18).
- Un triangle isocèle en deux sommets est équilatéral (ex. 19 à 21).
- Un triangle équilatéral est isocèle en chacun de ses sommets (ex. 22 à 24).
- Deux côtés d'un triangle équilatéral sont égaux (ex. 25 à 27).
- A et B étant deux points distincts, le triangle formé de A, du troisième point dextrogyre avec A et B (cf. leçon 19) et de B est équilatéral (ex. 28).

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C, \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C} \Rightarrow \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{C}}\dot{B}.$

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C, \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C} \Rightarrow \dot{B}\overset{\triangle}{\dot{C}}\dot{A}.$

Ex. 19: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{\dot{A}BC}\ \wedge \\ \overset{\triangle}{A\dot{B}C} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C}.$

Ex. 20: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{A\dot{B}C}\ \wedge \\ \overset{\triangle}{AB\dot{C}} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C}.$

Ex. 21: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{AB\dot{C}}\ \wedge \\ \overset{\triangle}{\dot{A}BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C}.$

Ex. 22: $\forall\ A\ B\ C, \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C} \Rightarrow \overset{\triangle}{\dot{A}BC}.$

Ex. 23: $\forall\ A\ B\ C, \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C} \Rightarrow \overset{\triangle}{A\dot{B}C}.$

Ex. 24: $\forall\ A\ B\ C, \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C} \Rightarrow \overset{\triangle}{AB\dot{C}}.$

Ex. 25: $\forall\ A\ B\ C, \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C} \Rightarrow AB = AC.$

Ex. 26: $\forall\ A\ B\ C, \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C} \Rightarrow BC = BA.$

Ex. 27: $\forall\ A\ B\ C, \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{B}}\dot{C} \Rightarrow CA = CB.$

Ex. 28: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow \dot{A}\overset{\triangle}{\left(\dot{\circlearrowleft}_{AB}\right)}\dot{B}.$

Leçon 33

Construction de triangle

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `H3_BuildingTriangle.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

33.1 Le troisième sommet

Définition A, B et C étant trois points avec $A \neq B$, on appelle **troisième sommet** construit sur un segment $[D, E]$ de même longueur que AB, le point d'intersection des cercles (D, AC) et (E, BC).

Notation $\frac{ABC}{DE}$.

Remarque Il s'agit de recopier le triangle $\overset{\triangle}{ABC}$ sur DE. Les cercles sont sécants par construction.

33.2 Exercices

- Les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DE\frac{ABC}{DE}}$ sont congruents (ex. 1).
- Le triangle $\overset{\triangle}{DE\frac{ABC}{DE}}$ n'est pas dextrogyre (ex. 2).
- Si les points A, B et C sont colinéaires et les triangles $\overset{\triangle}{ABC}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congruents, les points D, E et F sont colinéaires (ex. 3).
- Si les points A, B et C ne sont pas colinéaires, les points D, $\frac{ABC}{DE}$ et E sont dextrogyres (on utilise le résultat précédent) (ex. 4).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{c} A \neq B \wedge \\ AB = DE \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DE\frac{ABC}{DE}}.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{c} A \neq B \wedge \\ AB = DE \end{array}\right\} \Rightarrow \not\circlearrowleft \overset{\triangle}{DE\frac{ABC}{DE}}.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l}\overline{ABC}\ \wedge \\ \overset{\triangle}{ABC}\equiv\overset{\triangle}{DEF}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{DEF}.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E, \neg\overline{ABC} \Rightarrow \circlearrowright D\frac{\overset{\triangle}{ABC}}{DE}E.$

Livre 9 : Angles supplémentaires

A propos de ce tome : Nous allons développer dans ce tome la notion d'angles supplémentaires. Comme pour l'égalité et la congruence, nous allons utiliser deux définitions : l'angle supplémentaire d'un angle et la propriété pour six points d'être les sommets de deux angles supplémentaires l'un de l'autre, cette seconde notion incluant le fait que les extrémités des angles sont distinctes de leurs sommets.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 34

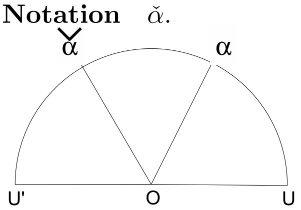
Supplémentaire d'un angle

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `I1_SupplementaryAngle.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

34.1 Supplémentaire d'un angle

Définition On appelle **supplémentaire de l'angle** α l'angle $\widehat{\alpha O U'}$.

Notation $\check{\alpha}$.



34.2 Exercices

- Le supplémentaire d'un angle est un angle (ex. 1).
- La distance séparant U' de α est égale à celle séparant U du supplémentaire de α (ex. 2).
- Si deux angles sont égaux, leurs supplémentaires le sont aussi (ex. 3).
- Le supplémentaire de l'angle nul est l'angle plat et inversement (ex. 4 et 5).
- Si un angle est sur la droite (OU), il est nul ou plat (ex. 6).
- Si un angle α est tel que les trois points U, O et α sont dextrogyres alors le suplémentaire du supplémentaire de α est α (ex. 7).
- Si α est un angle, le suplémentaire du supplémentaire de α est α (on utilisera les exercices précédents pour obtenir ce résultat) (ex. 8).

- Si β est le supplémentaire de l'angle α alors α est le supplémentaire de l'angle β (ex. 9).

Ex. 1: $\forall\ \alpha, \angle\alpha \Rightarrow \angle\check{\alpha}$.

Ex. 2: $\forall\ \alpha, \angle\alpha \Rightarrow U'\alpha = U\check{\alpha}$.

Ex. 3: $\forall\ \alpha\ \beta,\ \left.\begin{array}{l} \angle\alpha\ \wedge \\ \angle\beta\ \wedge \\ \alpha = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \check{\alpha} = \check{\beta}$.

Ex. 4: $\check{U} = U'$.

Ex. 5: $\check{U}' = U$.

Ex. 6: $\forall\ \alpha,\ \left.\begin{array}{l} \angle\alpha\ \wedge \\ \alpha \in (OU) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = U\ \vee \\ \alpha = U'. \end{array}\right.$

Ex. 7: $\forall\ \alpha,\ \left.\begin{array}{l} \angle\alpha\ \wedge \\ \circlearrowright UO\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \check{\check{\alpha}} = \alpha$.

Ex. 8: $\forall\ \alpha, \angle\alpha \Rightarrow \check{\check{\alpha}} = \alpha$.

Ex. 9: $\forall\ \alpha\ \beta,\ \left.\begin{array}{l} \angle\alpha\ \wedge \\ \angle\beta\ \wedge \\ \beta = \check{\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \check{\beta}$.

Leçon 35

Angles suppléments

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `I2_Supplement.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

35.1 Angles suppléments

Définition On dira que les six points A, B, C, D, E et F sont les sommets de deux **angles suppléments** si B est distinct de A et de C, si E est distinct de D et de F, et si l'angle $\widehat{ABC}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{DEF}$. Par abus de langage, on dira que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont suppléments ce qui suppose que l'on dispose des preuves de B est distinct de A et de C et de E distinct de D et de F.

Notation $\widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF}$.

35.2 Exercices

- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont suppléments, il en va de même pour les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{DEF}$, les angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{ABC}$ et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{FED}$ (ex. 1 à 3).
- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont suppléments, l'angle $\widehat{ABC}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{DEF}$ (ex. 4).
- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{KLM}$ sont suppléments et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congruents, alors les angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{KLM}$ sont suppléments (ex. 5).
- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{KLM}$ sont suppléments et les angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{KLM}$ sont suppléments alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congruents (ex. 6).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{CBA} \leftthreetimes \widehat{DEF}$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{DEF} \leftthreetimes \widehat{ABC}$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \widehat{ABC} \lessdot \widehat{DEF} \Rightarrow \widehat{ABC} \lessdot \widehat{FED}$.

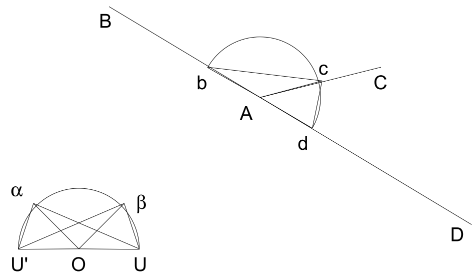
Ex. 4: $\forall\, A\, B\, C\, D\, E\, F,\ \left.\begin{array}{l} Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C\ \wedge \\ Hed : E \neq D\ \wedge \\ Hef : E \neq F\ \wedge \\ \widehat{ABC} \lessdot \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABCHbaHbc = (\angle DEF\check{H}edHef)$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F\ K\ L\ M,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \lessdot \widehat{KLM}\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DEF} \lessdot \widehat{KLM}$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F\ K\ L\ M,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \lessdot \widehat{KLM}\ \wedge \\ \widehat{DEF} \lessdot \widehat{KLM} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$.

35.3 Théorème

Enoncé Soient quatre points A, B, C et D si A est entre B et D et que C est distinct de A alors les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAD}$ sont suppléments.



Démonstration Posons $\alpha = \widehat{BAC}$ et $\beta = \widehat{CAD}$ et construisons les points b, c et d respectivement sur $[AB)$, $[AC)$ et $[AD)$ à distance unité de A ($b = \frac{A-OU}{AB}$, $c = \frac{A-OU}{AC}$ et $d = \frac{A-OU}{AD}$).
Comme A est entre B et D, il vient A est entre b et d.
En utilisant la relation de Chasles, on en déduit que la distance bd est égale à la ditance UU' (1).
b est donc distinct de d et l'on distingue les deux cas $c \neq d$ ou $c \neq b$.

- $c \neq d$:

  Les triangles $d\overset{\triangle}{A}c$ et $U\overset{\triangle}{O}\beta$ sont congrus car $Ad = OU$, $Ac = O\beta$ et $\widehat{dAc} \equiv \widehat{UO\beta}$ (2).

  Les triangles $b\overset{\triangle}{d}c$ et $U'\overset{\triangle}{U}\beta$ sont congrus car $db = UU'$ (d'après 1), $dc = U\beta$ (d'après 2) et $\widehat{bdc} \equiv \widehat{U'U\beta}$ (d'après 2).
  On en déduit que $\alpha = \check{\beta}$ car $O\check{\beta} = OU$, $U\check{\beta} = bc$ car $U\check{\beta} = U'\beta$ par définition, et $\not\!\!\varnothing\ U\check{\beta}O$ car $\check{\beta}$ est un angle.

- $b \neq c$:

  Les triangles $b\overset{\triangle}{A}c$ et $U\overset{\triangle}{O}\alpha$ sont congrus car $bA = OU$, $Ac = O\alpha$ et $\widehat{bAc} \equiv$

$\widehat{UO\alpha}$ (3).

Les triangles $\overset{\triangle}{dbc}$ et $\overset{\triangle}{U'U\alpha}$ sont congrus car $db = U'U$ (d'après 1), $bc = U\alpha$ (d'après 3) et $\widehat{dbc} \equiv \widehat{U'U\alpha}$ (d'après 3).
On en déduit que $\beta = \breve{\alpha}$ car $O\breve{\alpha} = OU$, $U\breve{\alpha} = cd$ car $U\breve{\alpha} = U'\alpha$ par définition, et $\not\circlearrowright U\breve{\alpha}O$ car $\breve{\alpha}$ est un angle.

Réciproques

- Si (C, A, B) et (D, A, C) ne sont pas dextrogyres et que $\widehat{CAD}$ et $\widehat{BAC}$ sont suppléments alors A est entre B et D (on construit la contre-marque de AD sur (AB) et en appliquant le théorème précédent, on montre que ce point est D) (ex. 7).

- Si (B, A, C) et (C, A, D) ne sont pas dextrogyres et que $\widehat{CAD}$ et $\widehat{BAC}$ sont suppléments alors A est entre B et D (on construit la contre-marque de AD sur (AB) et en appliquant le théorème précédent, on montre que ce point est D) (ex. 8).

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \not\circlearrowright CAB\ \wedge \\ \not\circlearrowright DAC\ \wedge \\ \widehat{CAD} \leftthreetimes \widehat{BAC} \end{array}\right\} \Rightarrow B - A - D.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \not\circlearrowright BAC\ \wedge \\ \not\circlearrowright CAD\ \wedge \\ \widehat{CAD} \leftthreetimes \widehat{BAC} \end{array}\right\} \Rightarrow B - A - D.$

35.4 D'autres propriétés

Ces propriétés découlent directement des exercices 4 et 5 de la leçon précédente:

- Les angles $\widehat{UOU}$ et $\widehat{UOU'}$ sont suppléments (ex. 9).

- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est nul et l'angle $\widehat{DEF}$ est plat alors ils sont suppléments (ex. 10).

- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est nul et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont suppléments alors l'angle $\widehat{DEF}$ est plat (ex. 11).

- Si l'angle $\widehat{DEF}$ est plat et les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont suppléments alors l'angle $\widehat{ABC}$ est nul (ex. 11).

Ex. 9: $\widehat{UOU} \leftthreetimes \widehat{UOU'}$.

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{U}\ \wedge \\ \widehat{DEF} \equiv \widehat{U'} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF}.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{U}\ \wedge \\ \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{U'}.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{DEF} \equiv \widehat{U'} \wedge \\ \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{U}.$

Ces propriétés découlent de la propriété de la somme des angles d'un triangle (leçon 28) :

- Si les triplets (I, J, K), (I, K, L) et (I, L, M) sont dextrogyres et que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{JIK}$ sont congrus ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{KIL}$ et les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{LIM}$, alors I est entre J et M (ex. 13).
- Si les triplets (I, J, K), (I, K, L) et (I, L, M) sont dextrogyres et que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{JIK}$ sont congrus ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{KIL}$ et les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{LIM}$, alors les angles $\widehat{JIL}$ et $\widehat{LIM}$ sont suppléments (ex. 14).
- Si les triplets (I, J, K) et (I, K, L) sont dextrogyres et que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{JIK}$ sont congrus ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{KIL}$, alors les angles $\widehat{JIL}$ et $\widehat{BCA}$ sont suppléments (ex. 15).
- Si les triplets (I, J, K) et (I, K, L) sont dextrogyres et que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{JIK}$ sont congrus ainsi que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{KIL}$, si I est entre J et M, alors (I, L, M) est dextrogyre (ex. 16).

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C\ I\ J\ K\ L\ M,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright IJK \wedge \\ \circlearrowright IKL \wedge \\ \circlearrowright ILM \wedge \\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{JIK} \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{KIL} \wedge \\ \widehat{BCA} \equiv \widehat{LIM} \end{array}\right\} \Rightarrow J - I - M.$

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C\ I\ J\ K\ L\ M,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright IJK \wedge \\ \circlearrowright IKL \wedge \\ \circlearrowright ILM \wedge \\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{JIK} \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{KIL} \wedge \\ \widehat{BCA} \equiv \widehat{LIM} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{JIL} \leftthreetimes \widehat{LIM}.$

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C\ I\ J\ K\ L,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright IJK \wedge \\ \circlearrowright IKL \wedge \\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{JIK} \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{KIL} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{JIL} \leftthreetimes \widehat{BCA}.$

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C\ I\ J\ K\ L\ M,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright IJK \wedge \\ \circlearrowright IKL \wedge \\ \widehat{CAB} \equiv \widehat{JIK} \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{KIL} \wedge \\ J - I - M \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright ILM.$

Leçon 36

Angles opposés

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `I3_OpposedAngles.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

36.1 Angles opposés

Définition On dira que les cinq points A, B, C, D et E sont les sommets de deux **angles opposés en A** si A est situé entre B et D et entre C et E.

Notation $\widehat{BAC} \bowtie \widehat{DAE}$.

36.2 Exercices

- Des angles opposés sont congruents (ex. 1).
- Si les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont congruents, si A est entre B et D et que les triplets (B, A, C) et (D, A, E) ne sont pas dextrogyres alors les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont opposés (ex. 2).
- Si les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont congruents, si A est entre B et D et que les triplets (C, A, B) et (E, A, D) ne sont pas dextrogyres alors les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont opposés (ex. 3).
- Si les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont congruents, si A est entre B et D et que les triplets (B, A, C) et (D, A, E) ne sont pas dextrogyres alors A est entre C et E (ex. 4).
- Si les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont congruents, si A est entre B et D et que les triplets (C, A, B) et (E, A, D) ne sont pas dextrogyres alors A est entre C et E (ex. 5).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E, \widehat{BAC} \bowtie \widehat{DAE} \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{DAE}$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l}\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAE} \wedge \\ B - A - D \wedge \\ \not\emptyset\ BAC \wedge \\ \not\emptyset\ DAE\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BAC} \bowtie \widehat{DAE}.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l}\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAE} \wedge \\ B - A - D \wedge \\ \not\emptyset\ CAB \wedge \\ \not\emptyset\ EAD\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BAC} \bowtie \widehat{DAE}.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l}\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAE} \wedge \\ B - A - D \wedge \\ \not\emptyset\ BAC \wedge \\ \not\emptyset\ DAE\end{array}\right\} \Rightarrow C - A - E.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l}\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAE} \wedge \\ B - A - D \wedge \\ \not\emptyset\ CAB \wedge \\ \not\emptyset\ EAD\end{array}\right\} \Rightarrow C - A - E.$

Livre 10 : Milieux et médiatrices

A propos de ce tome : La médiatrice d'un segment va être définie par sa construction au compas. On en déduira ses propriétés, puis on l'utilisera pour définir le milieu d'un segment.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

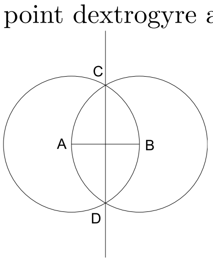
Leçon 37

Médiatrice

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `J1_MidLine.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

37.1 Médiatrice d'un segment

Définition A et B étant deux points distincts, on appelle médiatrice de $[AB]$ la droite passant par C, troisième point dextrogyre avec A et B et D, troisième point dextrogyre avec B et A.



Remarque et rappel Par construction, les points C et D sont distincts, ils définissent bien une droite, de plus (leçon 32, ex. 28) les triangles $A\overset{\triangle}{C}B$ et $B\overset{\triangle}{D}A$ sont équilatéraux (ex. 1 et 2).

Notation $(CD) = (A \dagger B)$.

37.2 Exercices

- Les triplets (A, C, B) et (B, D, A) sont dextrogyres (ex. 3 et 4).

- Les triangles $C\overset{\triangle}{D}A$ et $C\overset{\triangle}{D}B$ sont congruents (ex. 5).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{A}\overset{\triangle}{\dot{C}}\dot{B}.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{B}\overset{\triangle}{\dot{D}}\dot{A}.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright ACB.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright BDA.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow C\overset{\triangle}{D}A \equiv C\overset{\triangle}{D}B.$

37.3 Théorème

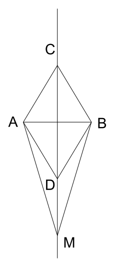
Tout point de la médiatrice de $[AB]$ est équidistant de A et de B.

Enoncé

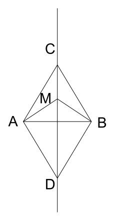
$$\forall\ A\ B\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ M \in (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow MA = MB$$

.

Démonstration Soient C et D les points de construction de $(A \dagger B)$. M étant alignés avec C et D on distingue les deux cas:



- $M \in]CD)$
  Les angles $\widehat{ACM}$ et $\widehat{ACD}$ sont congrus, de même que $\widehat{BCM}$ et $\widehat{BCD}$. Comme les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{BCD}$ sont congrus (ex. 5), les angles $\widehat{ACM}$ et $\widehat{BCM}$ le sont. Comme, $AC = BC$ par construction et $MC = MC$, les triangles $M\overset{\triangle}{A}C$ et $M\overset{\triangle}{B}C$ sont congruents. D'où $MA = MB$.



- $M \in]DC)$
  Les angles $\widehat{ADM}$ et $\widehat{ADC}$ sont congrus, de même que $\widehat{BDM}$ et $\widehat{BDC}$. Comme les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{BDC}$ sont congrus (ex. 5), les angles $\widehat{ADM}$ et $\widehat{BDM}$ le sont. Comme, $AD = BD$ par construction et $MD = MD$, les triangles $M\overset{\triangle}{A}D$ et $M\overset{\triangle}{B}D$ sont congruents. D'où $MA = MB$.

Leçon 38

Milieu d'un segment

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `J2_MidPoint.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

38.1 Milieu d'un segment

Définition A et B étant deux points distincts, C étant le troisième point dextrogyre avec A et B et D le troisième point dextrogyre avec B et A, on appelle **milieu du segment [AB]** le point d'intersection défini par deux orientations (A, B, C) et (A, B, D).

Remarque Plus simplement, le milieu de $[AB]$ est l'intersection de la droite (AB) et de la médiatrice de $[AB]$, mais la définition ci-dessus évite de tracer la droite (AB) et fournit immédiatement le fait que le milieu est situé entre C et D.

Notation $A \mid B$.

38.2 Exercices

- Le milieu de $[AB]$ est sur la médiatrice de $[AB]$ (ex. 1).
- Le milieu de $[AB]$ est équidistant de A et de B (ex. 2).
- Le milieu de $[AB]$ est entre les points de construction de la médiatrice de $[AB]$ (C et D), il est distinct de ces points (ex. 3 à 5).
- Le milieu de $[AB]$ est colinéaire avec A et B (ex. 6).
- Le milieu de $[AB]$ est distinct de A et de B (ex. 7 et 8).
- Le milieu de $[AB]$ est entre A et B (on distingue les trois cas à partir de l'ex. 6, l'un des points A, B ou $A \mid B$ est entre les deux autres, deux cas s'éliminent à cause de l'égalité de distance ex. 2) (ex. 9).

Ex. 1: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow (A \mid B) \in (A \dagger B)$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow A(A \mid B) = B(A \mid B)$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow C - (A \mid B) - D$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow (A \mid B) \neq C$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow (A \mid B) \neq D$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow \overline{AB(A \mid B)}$.

Ex. 7: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow (A \mid B) \neq A$.

Ex. 8: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow (A \mid B) \neq B$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow A - (A \mid B) - B$.

Leçon 39

Propriétés du milieu et de la médiatrice d'un segment

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `J3_MidProp.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

39.1 Propriétés

Remarque préliminaire Dans tous les énoncés, on supposera donnés les deux points A et B distincts, et on appellera C et D les points de construction de la médiatrice de $[AB]$ et I le milieu de $[AB]$.

39.2 Exercices

- Les triplets (A, C, I), (C, B, I), (A, C, D) et (B, D, C) sont dextrogyres (ex. 1 à 4).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright AC(A \mid B).$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright CB(A \mid B).$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright ACD.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright BDC.$

39.3 Théorème

Tout point équidistant de A et B est sur la médiatrice de $[AB]$.

Enoncé $\forall\ A\ B\ M,\ \left.\begin{array}{c} A \neq B\ \wedge \\ MA = MB \end{array}\right\} \Rightarrow M \in (A \dagger B).$

Démonstration On raisonne par cas sur les trois points C, D et M:

- $\circlearrowleft CDM$:
  Soit E le point d'intersection défini par les deux orientations $\circlearrowleft CDM$ et $\circlearrowleft DCB$. Raisonnons par l'absurde en montrant qu'alors $\circlearrowright MDC$.
  D'après le théorème de la leçon 11, il suffit de montrer $\circlearrowright ACD$ (ex. 3), $\overline{DCE}$ (par construction de E) et $A - E - M$.
  Pour montrer $A-E-M$, on commence par montrer $E \in]AM[$ en utilisant la réciproque du théorème de Chasles soit $AE + EM = AM$.
  Comme E est sur la médiatrice, on a $EA = EB$ et comme $B - E - M$ par construction de E, on a aussi $BE + EM = BM$ et comme par hypothèse $BM = AM$, l'égalité est démontrée.
  Il reste à établir que E est distinct de A (car $EA = EB$ et $E \neq B$) et de M (car $A - E - M$).

- $\circlearrowleft DCM$:
  On raisonne de même par l'absurde avec E le point d'intersection défini par les deux orientations $\circlearrowleft CDA$ et $\circlearrowleft DCM$.

- $\overline{CDM}$:
  Il ne reste que ce cas qui est ce que nous voulions démontrer.

39.4 Conséquences

On établit les propriétés suivantes :

Exercices

- Tout point équidistant de A et de B et colinéaire avec A et B est le milieu de $[AB]$ (ex. 5).

- Le milieu de $[AB]$ ne dépend ni de la preuve de $A \neq B$ ni de l'ordre des points (ex. 6 et 7).

- O est le milieu de $[UU']$ (ex. 8).

- Tout point M tel que (C, D) ait la même orientation que (I, M) est tel que (A, B, M) est dextrogyre (ex. 9).

- Tout point M tel que (D, C) ait la même orientation que (I, M) est tel que (A, M, B) est dextrogyre (ex. 10).

- Les triangles $\overset{\triangle}{AIC}$ et $\overset{\triangle}{BIC}$ sont congrus (ex. 11).

- Les triangles $\overset{\triangle}{AID}$ et $\overset{\triangle}{BID}$ sont congrus (ex. 12).

- Les triangles $\overset{\triangle}{AIC}$ et $\overset{\triangle}{AID}$ sont congrus (ex. 13).

- Les triangles $B\overset{\triangle}{I}C$ et $B\overset{\triangle}{I}D$ sont congrus (ex. 14).

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ J,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ \overline{ABJ}\ \wedge \\ AJ = BJ \end{array}\right\} \Rightarrow J = (A \mid B).$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ J,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B(H_1)\ \wedge \\ A \neq B(H_2) \end{array}\right\} \Rightarrow (A \mid B)_{H_1} = (A \mid B)_{H_2}.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ J, A \neq B \Rightarrow A \mid B = B \mid A.$

Ex. 8: $O = U \mid U'.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C\ D\ I\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B)\ \wedge \\ I = A \mid B\ \wedge \\ CD \Rsh\Rsh IM \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright ABM.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C\ D\ I\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B)\ \wedge \\ I = A \mid B\ \wedge \\ DC \Rsh\Rsh IM \end{array}\right\} \Rightarrow \circlearrowright AMB.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C\ D\ I,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B)\ \wedge \\ I = A \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{I}C \equiv B\overset{\triangle}{I}C.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C\ D\ I,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B)\ \wedge \\ I = A \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{I}D \equiv B\overset{\triangle}{I}D.$

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C\ D\ I,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B)\ \wedge \\ I = A \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{I}C \equiv A\overset{\triangle}{I}D.$

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C\ D\ I,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ (CD) = (A \dagger B)\ \wedge \\ I = A \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow B\overset{\triangle}{I}C \equiv B\overset{\triangle}{I}D.$

Livre 11 : Angle droit

A propos de ce tome : L'angle droit va être défini à partir de la médiatrice ce qui n'est pas sans rappeler la construction d'un angle droit au compas.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 40

L'angle droit

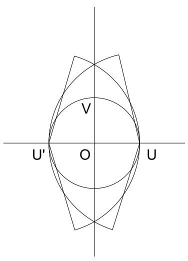
Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `K1_RightAngle.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

40.1 Définition

On appelle **angle droit** (direct) le point d'intersection du cercle unité et du diamètre, la médiatrice de $[U'U]$.

Remarque : Cette construction demande de prouver que la médiatrice de $[U'U]$ passe bien par le centre O du cercle unité (on utilise l'exercice 8 de la leçon précédente).

Notation $V = (U' \dagger U) \cap (O, OU)$.



Exercices

- V est à distance unité de O (ex. 1).
- V est sur la médiatrice de $[U'U]$ (ex. 2).
- Les triplets (U', V, U) et (O, V, U) sont dextrogyres (ex. 3 et 4).
- V est distinct de O, de U et de U' (ex. 5, 8 et 9).
- V est à distance égale de U et U' (ex. 6).

- Tout point M à distance unité de O, tel que (U, M, U') n'est pas dextrogyre, équidistant de U et U' est égal à V (ex. 7).
- V est un angle (ex. 10).

Ex. 1: $OV = U$.

Ex. 2: $V \in (U' \dagger U)$.

Ex. 3: $\circlearrowright U'VU$.

Ex. 4: $\circlearrowright OVU$.

Ex. 5: $V \neq O$.

Ex. 6: $VU = VU'$.

Ex. 7: $\forall M, \left.\begin{array}{l} OM = U \wedge \\ \not\circlearrowright UMU' \wedge \\ MU = MU' \end{array}\right\} \Rightarrow M = V.$

Ex. 8: $V \neq U$.

Ex. 9: $V \neq U'$.

Ex. 10: $\angle V$.

40.2 Angle droit

Définition On dira qu'un angle est **droit** s'il est congru à UOV.

Notation $\widehat{ABC} \equiv \widehat{V}$

Remarque : Comme précedemment, il s'agit d'un abus de langage, il serait correct de dire que le triplet (A, B, C) est un angle (c'est-à-dire que $B \neq A$ et $B \neq C$) et que cet angle est V.

Exercices

- L'angle $\widehat{UOV}$ est droit (ex. 11).
- L'angle $\widehat{VOU'}$ est droit (ex. 12).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, l'angle $\widehat{CBA}$ l'est aussi (ex. 13).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, B est distinct de A et de C (ex. 14 et 15).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congrus alors l'angle $\widehat{DEF}$ est droit et réciproquement (ex. 16 et 17).
- Si les points A, B et C sont tels que $B \neq A$ et $B \neq C$ et si l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, l'angle $\widehat{CBA}$ est V (ex. 18).

- Si les points A, B et C sont tels que $B \neq A$ et $B \neq C$ et si l'angle $\widehat{CBA}$ est V alors l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, (ex. 19).
- Si un angle est droit, il n'est pas nul et réciproquement, il n'est pas plat et réciproquement (ex. 20 à 23).

Ex. 11: $\widehat{UOV} \equiv \widehat{V}$.

Ex. 12: $\widehat{VOU'} \equiv \widehat{V}$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{V} \Rightarrow \widehat{CBA} \equiv \widehat{V}$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{V} \Rightarrow B \neq A$.

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{V} \Rightarrow B \neq C$.

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \left.\begin{array}{l}\widehat{ABC} \equiv \widehat{V}\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{V}$.

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \left.\begin{array}{l}\widehat{ABC} \equiv \widehat{V}\ \wedge \\ \widehat{DEF} \equiv \widehat{V}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$.

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l}Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABCHbaHbc = V$.

Ex. 19: $\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l}Hba : B \neq A\ \wedge \\ Hbc : B \neq C\ \wedge \\ \angle ABCHbaHbc = V \Rightarrow\end{array}\right\} \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}$.

Ex. 20: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{V} \Rightarrow \widehat{ABC} \not\equiv \widehat{U}$.

Ex. 21: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U} \Rightarrow \widehat{ABC} \not\equiv \widehat{V}$.

Ex. 22: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{V} \Rightarrow \widehat{ABC} \not\equiv \widehat{U'}$.

Ex. 23: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{U'} \Rightarrow \widehat{ABC} \not\equiv \widehat{V}$.

Leçon 41

Médiatrice et angle droit

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `K2_MidLineandRightAngle.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

41.1 Supplémentaire d'un angle droit

Exercices

- (lemme préliminaire) Si $\widehat{ABC}$ est un angle droit, les points A, B et C ne sont pas colinéaires (ex. 1).
- V est son propre supplémentaire (ex. 2).
- Tout angle α qui est son propre supplémentaire est égal à V (ex. 3).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est son propre supplément, il est droit (ex. 4).
- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont congrus et suppléments, ils sont droits (ex. 5).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{V} \Rightarrow \neg\overline{ABC}$.

Ex. 2: $\check{V} = V$.

Ex. 3: $\forall \alpha, \left.\begin{array}{c} \angle\alpha\ \wedge \\ \breve{\alpha} = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = V$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F, \left.\begin{array}{c} \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}\ \wedge \\ \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}$.

41.2 Angles au pied de la médiatrice

Avertissement : Dans tout le paragraphe, on supposera donnés les deux points A et B distincts et la médiatrice de $[AB]$ avec ses deux points de constructions C et D qui coupe $[AB]$ en son milieu I.

Exercices

- Les angles $\widehat{AIC}$, $\widehat{AID}$, $\widehat{BIC}$ et $\widehat{BID}$ sont droits (ex. 6 à 9).
- Tout point M de la médiatrice de $[AB]$ distinct de I est tel que les angles $\widehat{AIM}$ et $\widehat{BIM}$ sont droits (ex. 10 à 12).

$$\text{Ex. 6: } \forall\ A\ B\ C\ D\ I,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \\ I = A \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AIC} \equiv \widehat{V}.$$

$$\text{Ex. 7: } \forall\ A\ B\ C\ D\ I,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \\ I = A \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AID} \equiv \widehat{V}.$$

$$\text{Ex. 8: } \forall\ A\ B\ C\ D\ I,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \\ I = A \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BIC} \equiv \widehat{V}.$$

$$\text{Ex. 9: } \forall\ A\ B\ C\ D\ I,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ (CD) = (A \dagger B) \\ I = A \mid B \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BID} \equiv \widehat{V}.$$

$$\text{Ex. 10: } \forall\ A\ B\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ M \neq (A \mid B) \wedge \\ M \in (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow A(\widehat{A \mid B})M \equiv \widehat{V}.$$

$$\text{Ex. 11: } \forall\ A\ B\ I\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ M \neq I \wedge \\ I = A \mid B \wedge \\ M \in (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AIM} \equiv \widehat{V}.$$

$$\text{Ex. 12: } \forall\ A\ B\ I\ M,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ M \neq I \wedge \\ I = A \mid B \wedge \\ M \in (A \dagger B) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BIM} \equiv \widehat{V}.$$

41.3 Angles droits et suppléments

Les exercices ci-dessous n'apportent aucune information nouvelle, mais ils facilitent les démonstrations en favorisant l'usage des relations de congruence, de supplement, d'angle droit, plat ou nul. Cela permet de ne considérer que les points déterminants les angles en laissant implicites les preuves que ces angles sont bien définis par des extrémités distinctes des sommets.

Exercices

- L'angle $\widehat{UOV}$ est son propre supplément (ex. 13).
- Si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$ sont droits, ils sont suppléments l'un de l'autre (ex. 14).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, il est supplément de lui-même (ex. 15).

- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est droit et $\widehat{DEF}$ est son supplément, alors l'angle $\widehat{DEF}$ est droit (ex. 16).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est droit ou congru à l'angle $\widehat{DEF}$ et que l'angle $\widehat{DEF}$ est son supplément, alors l'angle $\widehat{DEF}$ est droit (ex. 17).
- Si l'angle $\widehat{ABC}$ est droit et que l'angle $\widehat{DEF}$ est soit le supplément de $\widehat{ABC}$ soit congru à $\widehat{ABC}$, alors l'angle $\widehat{DEF}$ est droit (ex. 18).

Ex. 13: $\widehat{UOV} \leftthreetimes \widehat{UOV}$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}\ \wedge \\ \widehat{DEF} \equiv \widehat{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF}.$

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C, \widehat{ABC} \equiv \widehat{V} \Rightarrow \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{ABC}.$

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}\ \wedge \\ \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{V}.$

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} (\widehat{ABC} \equiv \widehat{V}\ \vee \\ \ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF})\ \wedge \\ \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{V}.$

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}\ \wedge \\ (\widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF}\ \vee \\ \ \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DEF} \equiv \widehat{V}.$

Livre 12 : Les parallélogrammes

A propos de ce tome : La notion de milieu permet d'avoir une définition assez générale de parallélogramme incluant les parallélogrammes plats. Toutefois la notion de parallélogramme strict sera introduite car elle sera utile pour obtenir une construction du quatrième sommet à la règle et au compas. Un résultat important est le fait que les côtés sont parallèles. Il permettra dans la suite de montrer l'unicité de la parallèle menée par un point extérieur à une droite (postulat d'Euclide) en utilisant l'axiome 19 sur la somme des angles d'un triangle.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 42

Parallélogramme

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `L1_Parallelogramm.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

42.1 Définitions

- On dira que les quatre points A, B, C et D forment un **parallélogramme** si A et C sont distincts, B et D sont distincts et si le milieu de $[AC]$ est égal au milieu de $[BD]$.
- On appelle **centre** du parallélogramme $ABCD$ le milieu des diagonales.

Remarque La définition par l'égalité des milieux des diagonales permet d'avoir des parallélogrammes plats. Toutefois, la construction du milieu impose que les diagonales ne soient pas réduites à un point.

Notations

- parallélogramme : $\sharp ABCD$.
- centre : $\overset{\odot}{\sharp} ABCD$.
- quatrième sommet du parallélogramme : $\sharp^4 ABC\_$.

42.2 Exercices

- Si $ABCD$ est un parallélogramme, il en est de même pour $ADCB$ et $BCDA$ (ex. 1 et 2).
- Le centre du parallélogramme ne dépend pas de la preuve de parallélogramme (ex. 3).
- Le centre du parallélogramme $ABCD$ est compris entre A et C, il est compris entre B et D, il est à même distance de A et C ainsi que de B et D (ex. 4 à 7).

- Si K est le centre du parallélogramme $ABCD$, les triangles $A\overset{\triangle}{K}B$ et $C\overset{\triangle}{K}D$ sont congrus ainsi que $B\overset{\triangle}{K}C$ et $D\overset{\triangle}{K}A$ (ex. 8 et 9).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme, les côtés opposés ont même longueur (ex. 10 et 11).
- Dans un parallélogramme $ABCD$, tout point compris entre A et C et à égale distance de A et C est égal au centre du parallélogramme, de même que tout point compris entre B et D et à égale distance de B et D (ex. 12).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme, les triangles $A\overset{\triangle}{B}C$ et $C\overset{\triangle}{D}A$ sont congrus ainsi que $B\overset{\triangle}{C}D$ et $D\overset{\triangle}{A}B$ (ex. 13 et 14).
- Si A et C sont distincts et B distinct du milieu de $[AC]$, alors le symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$ est le quatrième sommet du parallélogramme ayant A, B et C comme sommmets (construction d'un parallélogramme à partir de 3 sommets) (ex. 15).
- Dans un parallélogramme $ABCD$, si deux sommets consécutifs sont distincts, les deux sommets opposés le sont aussi (ex. 16 à 19).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow \sharp ADCB.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow \sharp BCDA.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D, \forall H_1 : \sharp ABCD, \forall H_2 : \sharp ABCD, \underset{\sharp}{\odot} ABCD_{H_1} = \underset{\sharp}{\odot} ABCD_{H_2}.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow A - \underset{\sharp}{\odot} ABCD - C.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow B - \underset{\sharp}{\odot} ABCD - D.$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow A(\underset{\sharp}{\odot} ABCD) = C(\underset{\sharp}{\odot} ABCD).$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow B(\underset{\sharp}{\odot} ABCD) = D(\underset{\sharp}{\odot} ABCD).$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow A(\overset{\triangle}{\underset{\sharp}{\odot} ABCD})B \equiv C(\overset{\triangle}{\underset{\sharp}{\odot} ABCD})D.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow B(\overset{\triangle}{\underset{\sharp}{\odot} ABCD})C \equiv D(\overset{\triangle}{\underset{\sharp}{\odot} ABCD})A.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow AB = CD.$

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow BC = DA.$

Ex. 12: $$\forall\ A\ B\ C\ D\ K, \quad \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A - K - C\ \wedge \\ AK = KC \end{array}\right\} \vee \\ \left.\begin{array}{l} B - K - D\ \wedge \\ BK = KD \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow K = \underset{\sharp}{\odot} ABCD.$$

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}C \equiv C\overset{\triangle}{D}A.$

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow B\overset{\triangle}{C}D \equiv D\overset{\triangle}{A}B.$

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A \neq C\ \wedge \\ B \neq (A \mid C) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(A|C)-B(A|C)}{B(A|C)} = \sharp^4 ABC\_.$

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD\ \wedge \\ A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow C \neq D.$

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD\ \wedge \\ B \neq C \end{array}\right\} \Rightarrow D \neq A.$

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD\ \wedge \\ C \neq D \end{array}\right\} \Rightarrow A \neq B.$

Ex. 19: $\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD\ \wedge \\ D \neq A \end{array}\right\} \Rightarrow B \neq C.$

Leçon 43

Parallélogramme strict

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `L2_StrictParallelogramm.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

43.1 Définition

On dira que le parallélogramme $ABCD$ est **strict** si le triplet (A, B, C) est dextrogyre.

Notation $\sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Remarque En *Coq*, le centre du parallélogramme est défini avec comme paramètre la preuve du parallélogramme, le centre du parallélogramme strict aura comme paramètre la preuve du parallélogramme strict, ce sont donc deux termes de types distincts, il faut donc leur attribuer des identificateurs distincts. Evidemment, cette subtilité n'a pas lieu d'être conservée en langage usuel et nous parlerons donc indifferement de centre du parallélogramme et de centre du parallélogramme strict, les points étant les mêmes.

43.2 Exercices

- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict de centre K, les triplets (A, B, C), (A, B, K), (B, C, K), (B, C, D), (C, D, K), (C, D, A), (D, A, K) et (D, A, B) sont dextrogyres (ex. 1 à 8).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict, $BCDA$ l'est aussi (ex. 9).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme de centre K, si l'un des triplets (A, B, K), (B, C, K), (B, C, D), (C, D, K), (C, D, A), (D, A, K) et (D, A, B) est dextrogyre, $ABCD$ est un parallélogramme strict (ex. 10 à 16).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict, les sommets adjacents sont distincts (ex. 17 à 20).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \circlearrowright ABC$.

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \circlearrowright AB(\underset{\sharp}{\odot} ABCD)$.

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \circlearrowright BC(\underset{\sharp}{\odot} ABCD)$.

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \circlearrowright BCD$.

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \circlearrowright CD(\underset{\sharp}{\odot} ABCD)$.

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \circlearrowright CDA$.

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \circlearrowright DA(\underset{\sharp}{\odot} ABCD)$.

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \circlearrowright DAB$.

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} BCDA$.

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ \circlearrowright AB(\underset{\sharp}{\odot} ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ \circlearrowright BC(\underset{\sharp}{\odot} ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ \circlearrowright BCD \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Ex. 13: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ \circlearrowright CD(\underset{\sharp}{\odot} ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Ex. 14: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ \circlearrowright CDA \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Ex. 15: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ \circlearrowright DA(\underset{\sharp}{\odot} ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Ex. 16: $\forall\ A\ B\ C\ D, \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ \circlearrowright DAB \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Ex. 17: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow A \neq B$.

Ex. 18: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow B \neq C$.

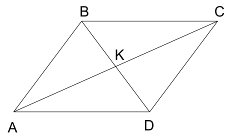
Ex. 19: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow C \neq D$.

Ex. 20: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow D \neq A$.

43.3 Théorème

Si les quatre points A, B, C et D sont tels que (A, B, C) et (C, D, A) sont dextrogyres, que $AB = CD$ et $BC = DA$ alors $ABCD$ est un parallélogramme strict.

Enoncé $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\circlearrowright ABC \wedge \\ \circlearrowright CDA \wedge \\ AB = CD \wedge \\ BC = DA\end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD.$



Démonstration Soit K le milieu de $[AC]$.
On note que $B \neq D$ sinon les deux hypothèses d'orientation seraient contradictoires, que (A, B, K) et (C, D, K) sont dextrogyres.

Les triangles $C\overset{\triangle}{D}A$ et $A\overset{\triangle}{B}C$ sont congruents car les trois côtés respectifs sont égaux.

Les triangles $A\overset{\triangle}{B}K$ et $C\overset{\triangle}{D}K$ sont congruents car $AB = CD$, $AK = KC$ et $\widehat{KAB} \equiv \widehat{CAB} \equiv \widehat{ACD} \equiv \widehat{KCD}$.
On en déduit que les angles $\widehat{AKB}$ et $\widehat{CKD}$ sont congruents et donc que K est entre B et D (ex. 4 de la leçon 36).
On en déduit aussi $BK = KD$ donc K est le milieu de $[BD]$ et par définition $ABCD$ est un parallélogramme.
Comme (A, B, C) est dextrogyre, le parallélogramme est strict (Q.E.D.).

Construction On en déduit qu'étant donné trois points A, B et C dextrogyres, on sait construire le quatrième sommet du parallélogramme strict $ABCD$ avec la construction de l'exercice 15 de la leçon précédente (symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$).

Exercices

- Si (A, B, C) est dextrogyre et D le symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$, alors $ABCD$ est un parallélogramme strict (ex. 21).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict, le symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$ est égal à D (ex. 22).

Ex. 21: $\forall\ A\ B\ C, \circlearrowright ABC \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABC(\frac{(A|C)-B(A|C)}{B(A|C)})$.

Ex. 22: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\circlearrowright ABC \wedge \\ \sharp^{\circlearrowright} ABCD\end{array}\right\} \Rightarrow D = \frac{(A|C)-B(A|C)}{B(A|C)}.$

Leçon 44

Côtés opposés d'un parallélogramme

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `L3_EquidirectedParallelogramm.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Avertissement Dans cette leçon nous allons montrer que les côtés opposés d'un parallélogramme ont même direction.

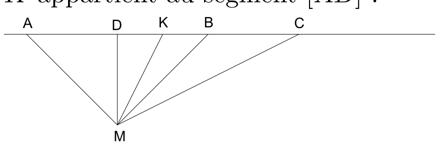
44.1 Lemme 1

Si le parallélogramme $ABCD$ est tel que son centre est aligné avec A et B, alors (A, B) et (D, C) ont même orientation.

Enoncé $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\dfrac{\sharp ABCD\ \wedge}{AB(\overset{\odot}{\underset{\sharp}{}}ABCD)}\right\} \Rightarrow AB \upuparrows DC.$

Démonstration On appelle K le centre de $ABCD$. On rappelle que le centre du parallélogramme est situé entre A et C, entre B et D et que les triangles $\overset{\triangle}{AKB}$ et $\overset{\triangle}{CKD}$ sont congruents. On en déduit $AB = CD$, $AK = KC$ et $BK = KD$. On raisonne par cas sur l'ordre respectif des points alignés A, B et K :

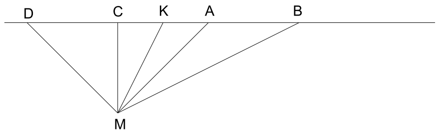
- K appartient au segment $[AB]$:

  En utilisant la réciproque du théorème de Chasles, on en déduit que K appartient au segment $[DC]$.
  Par définition de même orientation, il faut montrer que tout point M tel que (A, B, M) est dextrogyre vérifie que (D, C, M) est dextrogyre.

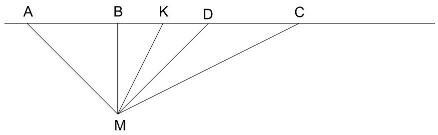
Comme (A, B, M) est dextrogyre, il en va de même pour (K, B, M), pour (D, K, M) et donc (D, C, M).

- A appartient au segment $[BK]$:



En utilisant la réciproque du théorème de Chasles, on en déduit que C appartient au segment $[DK]$.
Par définition de même orientation, il faut montrer que tout point M tel que (A, B, M) est dextrogyre vérifie que (D, C, M) est dextrogyre. Comme (A, B, M) est dextrogyre, il en va de même pour (K, B, M), pour (D, K, M) et donc (D, C, M).

- B appartient au segment $[KA]$:

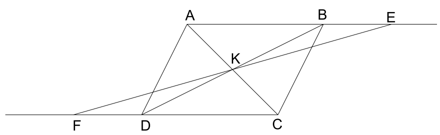


En utilisant la réciproque du théorème de Chasles, on en déduit que D appartient au segment $[KC]$.
Par définition de même orientation, il faut montrer que tout point M tel que (A, B, M) est dextrogyre vérifie que (D, C, M) est dextrogyre. Comme (A, B, M) est dextrogyre, il en va de même pour (B, K, M), pour (K, D, M) et donc (D, C, M).

44.2 Lemme 2

Etant donné un parallélogramme strict $ABCD$ et un point E distinct du centre du parallélogramme, si E appartient à la demi-droite $]AB)$, le symétrique de E par rapport au centre du parallélogramme appartient à la demi-droite $]CD)$.

Enoncé $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp^{\circlearrowright} ABCD \wedge \\ E \neq \overset{\odot}{\sharp} ABCD \wedge \\ E \in]AB) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(\overset{\odot}{\sharp} ABCD) - E(\overset{\odot}{\sharp} ABCD)}{E(\overset{\odot}{\sharp} ABCD)} \in$ $]CD)$.



Démonstration On rappelle que $A \neq B$, $C \neq D$ et $A \neq E$. On appelle K le centre de $ABCD$. On rappelle que les triangles $\overset{\triangle}{AKB}$ et $\overset{\triangle}{CKD}$ sont congruents et (C, D, K) dextrogyre.

Soit F le symétrique de E par rapport à K. E est donc distinct de F. $AECF$ est un parallélogramme car ses diagonales se coupent en leur milieu K, il est strict car (A, E, C) est dextrogyre, de plus le centre de $AECF$ est K. On en déduit que les triangles $\overset{\triangle}{AKE}$ et $\overset{\triangle}{CKF}$ sont congruents et que (C, F, K) est dextrogyre.
Il vient

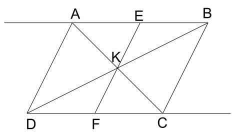
$$\widehat{KCD} \equiv \widehat{KAB} \equiv \widehat{KAE} \equiv \widehat{KCF}$$

ce qui établit $F \in]CD)$ puisque (K, C, D) et (K, C, F) sont dextrogyres.

44.3 Lemme 3

Etant donné un parallélogramme strict $ABCD$ et un point E distinct du centre du parallélogramme, si E appartient à la demi-droite $]BA)$, le symétrique de E par rapport au centre du parallélogramme appartient à la demi-droite $]DC)$.

Enoncé $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp^{\circlearrowright} ABCD \wedge \\ E \neq \overset{\odot}{\underset{\sharp}{}} ABCD \wedge \\ E \in]BA) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{(\overset{\odot}{\underset{\sharp}{}} ABCD) - E(\overset{\odot}{\underset{\sharp}{}} ABCD)}{E(\overset{\odot}{\underset{\sharp}{}} ABCD)} \in$ $]DC)$.

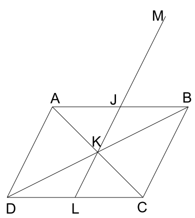


Démonstration Ce lemme s'établit de la même façon que le précédent.

44.4 Théorème

Dans un parallélogramme strict $ABCD$, (B, A) a même orientation que (C, D).

Enoncé $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow BA \upuparrows CD.$



Démonstration Soit M tel que (B, A, M) est dextrogyre, montrons que (C, D, M) l'est aussi.
Soit K le centre de $ABCD$, comme le parallélogramme est strict, (A, B, K) est dextrogyre.

Appelons J le point d'intersection défini par les deux orientations (A, B, K) et (A, B, M).
Soit L le symétrique de J par rapport à K.
Comme J est entre M et K et que K est entre J et L, il vient K entre L et M (ex. 6 leçon 20).
Comme A, B et J sont alignés, on distingue les deux cas :

- J appartient à $]AB)$.
  D'après le lemme 2, L appartient à $]CD)$.
  Les orientations dextrogyres suivantes se déduisent l'une de l'autre :
  - (B, A, M) (par hypothèse),
  - (J, A, M) car $J \in]AB)$,
  - (K, A, M) car $M - J - K$,
  - (K, M, C) car $A - K - C$,
  - (L, M, C) car $M - K - L$,
  - (C, D, M) car $L \in]CD)$.
- J appartient à $]BA)$.
  D'après le lemme 2, L appartient à $]DC)$.
  Les orientations dextrogyres suivantes se déduisent l'une de l'autre :
  - (B, A, M) (par hypothèse),
  - (J, M, B) car $J \in]BA)$,
  - (B, K, M) car $M - J - K$,
  - (M, K, D) car $B - K - D$,
  - (L, D, M) car $M - K - L$,
  - (C, D, M) car $L \in]DC)$.

44.5 Théorème

Dans un parallélogramme $ABCD$, (A, B) et (C, D) ont même direction.

Enoncé $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp ABCD \Rightarrow BA \Lsh\!\Rsh CD.$

Démonstration Soit K le centre de $ABCD$, on distingue les trois cas sur la position respective des trois points A, B et K:

- (A, B, K) est dextrogyre.
  Le parallélogramme $ABCD$ est strict. D'après le théorème précédent, (B, A) a même orientation que (C, D), donc (A, B) et (C, D) ont même direction.
- (B, A, K) est dextrogyre.
  $DCBA$ est un parallélogramme, il a même centre K, il est strict. D'après le théorème précédent, (C, D) a même orientation que (B, A), donc (A, B) et (C, D) ont même direction.

- A, B, K sont alignés.
  D'après le lemme 1, (A, B) a même orientation que (D, C), donc (A, B) et (C, D) ont même direction.

Leçon 45

Angles d'un parallélogramme

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `L4_ParallelogrammAngles.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Avertissement Dans un parallélogramme, on a de nombreuses relations entre les angles.

45.1 Premières propriétés

Exercices

- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel B est distinct de A et C alors les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$ sont congruents (ex. 1).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{BCD}$ sont congruents (ex. 2).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel B est distinct de A et C alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont congruents (ex. 3).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont congruents (ex. 4).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel A est distinct de B alors les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont congruents (ex. 5).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont congruents (ex. 6).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel B est distinct de C alors les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BCA}$ sont congruents (ex. 7).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BCA}$ sont congruents (ex. 8).

- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel A est distinct de B alors les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont congruents (ex. 9).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont congruents (ex. 10).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel B est distinct de C alors les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ sont congruents (ex. 11).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{CBD}$ sont congruents (ex. 12).

Ex. 1: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD\ \wedge\\ B \neq A\ \wedge\\ B \neq C\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{BCD}.$

Ex. 2: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowleft} ABCD \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{BCD}.$

Ex. 3: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD\ \wedge\\ B \neq A\ \wedge\\ B \neq C\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{CDA}.$

Ex. 4: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowleft} ABCD \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{CDA}.$

Ex. 5: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD\ \wedge\\ A \neq B\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{DCA}.$

Ex. 6: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowleft} ABCD \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{DCA}.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD\ \wedge\\ B \neq C\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{BCA}.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowleft} ABCD \Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{BCA}.$

Ex. 9: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD\ \wedge\\ A \neq B\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABD} \equiv \widehat{CDB}.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowleft} ABCD \Rightarrow \widehat{ABD} \equiv \widehat{CDB}.$

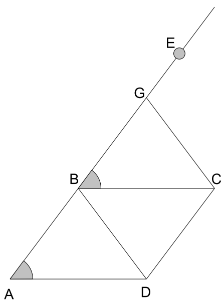
Ex. 11: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD\ \wedge\\ B \neq C\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ADB} \equiv \widehat{CBD}.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowleft} ABCD \Rightarrow \widehat{ADB} \equiv \widehat{CBD}.$

45.2 Angles extérieurs (parallélogramme strict)

Théorème Si $ABCD$ est un parallélogramme strict et E un point tel que B soit entre A et E alors les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CBE}$ sont congruents.

Enoncé : $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l}\sharp^{\circlearrowleft} ABCD\ \wedge\\ A - B - E\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{CBE}.$

Figure : 

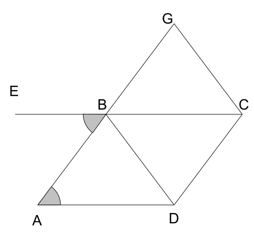
Démonstration Soit G le quatrième sommet du parallélogramme strict commeçant par CDB.
Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ sont congruents ainsi que $\widehat{CBG}$ et $\widehat{BCD}$, les trois angles $\widehat{ABD}$, $\widehat{DBC}$ et $\widehat{CBG}$ sont donc congruents aux trois angles du triangle $\overset{\triangle}{DBC}$ et comme les triplets (A, B, D), (D, B, C) et (C, B, G) sont dextrogyres, en appliquant le théorème sur la somme des angles d'un triangle (leçon 28), il vient B est entre G et A.
On en déduit que G est sur $]BE)$ et donc les congruences suivantes :

$$\widehat{DAB} \equiv \widehat{DCB} \equiv \widehat{CBG} \equiv \widehat{CBE}.$$

45.3 Angles alternes-internes (parallélogramme strict)

Théorème Si $ABCD$ est un parallélogramme strict et E un point tel que B soit entre C et E alors les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{EBA}$ sont congruents.

Enoncé : $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp^{\circlearrowright} ABCD \wedge \\ C - B - E \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{EBA}.$

Figure : 

Démonstration De même que précédemment, on construit G le quatrième sommet du parallélogramme strict commeçant par CDB.
Les angles $\widehat{EBA}$ et $\widehat{CBG}$ sont opposés d'où les congruences suivantes :

$$\widehat{DAB} \equiv \widehat{DCB} \equiv \widehat{CBG} \equiv \widehat{EBA}.$$

45.4 Angles d'un parallélogramme plat

Exercices

- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel A est distinct de D et C appartient au segment $[AB]$ alors l'angle $\widehat{DAB}$ est plat (ex. 13).
- Si B est entre A et E et C entre A et B alors l'angle $\widehat{CBE}$ est plat (ex. 14).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel A est distinct de B et A appartient au segment $[BC]$ alors l'angle $\widehat{DAB}$ est plat (ex. 15).
- Si B est entre A et E et A entre C et B alors l'angle $\widehat{CBE}$ est plat (ex. 16).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel A est distinct de B et de D et si B appartient au segment $[CA]$ alors l'angle $\widehat{DAB}$ est nul (ex. 17).
- Si B est entre A et E et B entre C et A alors l'angle $\widehat{CBE}$ est nul (ex. 18).

$$\text{Ex. 13: } \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ A \neq D \wedge \\ C \in [AB] \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{U'}.$$

$$\text{Ex. 14: } \forall\ A\ B\ C\ E,\ \left.\begin{array}{l} A - B - E \wedge \\ A - C - B \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CBE} \equiv \widehat{U'}.$$

$$\text{Ex. 15: } \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ A \in [BC] \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{U'}.$$

$$\text{Ex. 16: } \forall\ A\ B\ C\ E,\ \left.\begin{array}{l} A - B - E \wedge \\ C - A - B \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CBE} \equiv \widehat{U'}.$$

$$\text{Ex. 17: } \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ A \neq D \wedge \\ B \in [CA] \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{U}.$$

$$\text{Ex. 18: } \forall\ A\ B\ C\ E,\ \left.\begin{array}{l} A - B - E \wedge \\ C - B - A \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CBE} \equiv \widehat{U}.$$

45.5 Angles extérieurs (cas général)

Lemme (cas du parallélogramme plat) Si $ABCD$ est un parallélogramme avec A distinct de D et A, B et C alignés et si E est un point tel que B soit entre A et E alors les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CBE}$ sont congruents.

$$\textbf{Enoncé :}\quad \forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ A \neq D \wedge \\ A - B - E \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{CBE}.$$

Démonstration On raisonne par cas en partant de A, B et C colinéaires :

- C appartient au segment $[AB]$: on a $\widehat{CBE} \equiv \widehat{U'}$ (ex. 14) et $\widehat{DAB} \equiv \widehat{U'}$ (ex. 13).
- A appartient au segment $[BC]$: on a $\widehat{CBE} \equiv \widehat{U'}$ (ex. 16) et $\widehat{DAB} \equiv \widehat{U'}$ (ex. 15).
- B appartient au segment $[CA]$: on a $\widehat{CBE} \equiv \widehat{U}$ (ex. 18) et $\widehat{DAB} \equiv \widehat{U}$ (ex. 17).

Théorème Si $ABCD$ est un parallélogramme avec A et D distincts et si E est un point tel que B soit entre A et E alors les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CBE}$ sont congruents.

Enoncé : $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ A \neq D \wedge \\ A - B - E \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{CBE}.$

Démonstration On raisonne par cas sur les points A, B et C :

- (A, B, C) est dextrogyre : on applique le théorème des angles extérieurs dans le parallélogramme strict $ABCD$.
- (A, C, B) est dextrogyre : on applique le théorème des angles alternes-internes dans le parallélogramme strict $CBAD$.
- A, B, C sont alignés : on applique le lemme.

45.6 Angles alternes-internes (cas général)

Théorème Si $ABCD$ est un parallélogramme avec A et B distincts et si E est un point tel que B soit entre C et E alors les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{EBA}$ sont congruents.

Enoncé : $\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp ABCD \wedge \\ A \neq B \wedge \\ C - B - E \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \equiv \widehat{EBA}.$

Démonstration On utilise le théorème précédent sur le parallélogramme $DCBA$.

45.7 Angles suppléments dans un parallélogramme

Exercices

- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel B est distinct de A et de C alors l'angle $\widehat{DAB}$ est le supplément de l'angle $\widehat{ABC}$ (ex. 19).
- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors l'angle $\widehat{DAB}$ est le supplément de l'angle $\widehat{ABC}$ (ex. 20).

- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel B est distinct de A et de C alors l'angle $\widehat{ABC}$ est le supplément de l'angle $\widehat{BCD}$ (ex. 21).

- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors l'angle $\widehat{ABC}$ est le supplément de l'angle $\widehat{BCD}$ (ex. 22).

- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel B est distinct de A et de C alors l'angle $\widehat{BCD}$ est le supplément de l'angle $\widehat{CDA}$ (ex. 23).

- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors l'angle $\widehat{BCD}$ est le supplément de l'angle $\widehat{CDA}$ (ex. 24).

- Si $ABCD$ est un parallélogramme dans lequel B est distinct de A et de C alors l'angle $\widehat{CDA}$ est le supplément de l'angle $\widehat{DAB}$ (ex. 25).

- Si $ABCD$ est un parallélogramme strict alors l'angle $\widehat{CDA}$ est le supplément de l'angle $\widehat{DAB}$ (ex. 26).

Ex. 19: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD \wedge \\ B \neq A \wedge \\ B \neq C\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{DAB} \leftthreetimes \widehat{ABC}.$

Ex. 20: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \widehat{DAB} \leftthreetimes \widehat{ABC}.$

Ex. 21: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD \wedge \\ B \neq A \wedge \\ B \neq C\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{BCD}.$

Ex. 22: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{BCD}.$

Ex. 23: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD \wedge \\ B \neq A \wedge \\ B \neq C\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BCD} \leftthreetimes \widehat{CDA}.$

Ex. 24: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \widehat{BCD} \leftthreetimes \widehat{CDA}.$

Ex. 25: $\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l}\sharp ABCD \wedge \\ B \neq A \wedge \\ B \neq C\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CDA} \leftthreetimes \widehat{DAB}.$

Ex. 26: $\forall\ A\ B\ C\ D, \sharp^{\circlearrowright} ABCD \Rightarrow \widehat{CDA} \leftthreetimes \widehat{DAB}.$

45.8 Autres caractérisation d'un parallélogramme strict

Exercices

- Si (A, B, C) et (C, B, D) sont dextrogyres, si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont congruents, si les distances AB et CD sont égales alors $ABDC$ est un parallélogramme strict (ex. 27).

- Si (A, B, C) et (B, C, D) sont dextrogyres, si les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont suppléments, si les distances AB et CD sont égales alors $ABCD$ est un parallélogramme strict (ex. 28).

$$\text{Ex. 27: } \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \land \\ \circlearrowright CBD \land \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{BCD} \land \\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABDC.$$

$$\text{Ex. 28: } \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} \circlearrowright ABC \land \\ \circlearrowright BCD \land \\ \widehat{ABC} \curlywedge \widehat{BCD} \land \\ AB = CD \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} ABCD.$$

Leçon 46

Parallélogramme et distances archimédiennes

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `L5_nParallelogramm.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

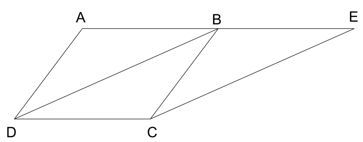
Avertissement De même que l'on a pu reporter n fois un segment sur un axe, on va reporter n fois un parallélogramme dans une de ses directions. L'intérêt de cette construction est de nous offrir le moyen de démontrer l'unicité de la parallèle passant par un point en utilisant l'axiome sur la somme des angles d'un triangle.

46.1 Théorèmes

46.1.1 Enoncé

Si $ABCD$ est un parallélogramme strict et E est le symétrique de A par rapport à B alors $BECD$ est un parallélogramme strict.

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp^{\circlearrowright} ABCD \wedge \\ A - B - E \wedge \\ AB = BE \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} BECD.$$

Figure : 

Démonstration On va utiliser le théorème du chapitre 43 en montrant les quatre prémisses :

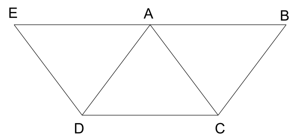
- (B, E, C) est dextrogyre : car (A, B, C) est dextrogyre et $A - B - E$.

- (C, D, B) est dextrogyre : car $ABCD$ est un parallélogramme strict.
- $BE = CD$: car $BE = AB = CD$.
- $EC = DB$: car les triangles $\overset{\triangle}{ABD}$ et $\overset{\triangle}{BEC}$ sont congruents, ils ont deux cotés égaux $AB = BE$ et $AD = BC$ et les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CBE}$ congruents (angles extérieurs).

46.1.2 Enoncé

Si $ABCD$ est un parallélogramme strict et E est le symétrique de B par rapport à A alors $EACD$ est un parallélogramme strict.

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp^{\circlearrowright} ABCD\ \wedge \\ E - A - B\ \wedge \\ EA = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} EACD.$$

Figure : 

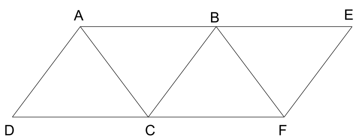
Démonstration On va utiliser le théorème du chapitre 43 sur le quadrilatère $DEAC$ en montrant les quatre prémisses :

- (D, E, A) est dextrogyre : car (A, B, D) est dextrogyre et $E - A - B$.
- (A, C, D) est dextrogyre : car $ABCD$ est un parallélogramme strict.
- $DE = AC$: car les triangles $\overset{\triangle}{ADC}$ et $\overset{\triangle}{DAE}$ sont congruents, ils ont un côté commun AD, des cotés égaux $DC = AE$ et les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{DAE}$ congruents (angles alternes-internes).
- $EA = CD$: car $EA = AB = CD$.

46.1.3 Enoncé

Si $ABCD$ est un parallélogramme strict et E est le symétrique de A par rapport à B et F le symétrique de D par rapport à C alors $BEFC$ est un parallélogramme strict.

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} \sharp^{\circlearrowright} ABCD\ \wedge \\ A - B - E\ \wedge \\ AB = BE\ \wedge \\ D - C - F\ \wedge \\ DC = CF \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright} BEFC.$$

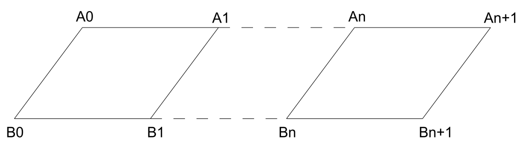
Figure : 

Démonstration En utilisant successivement les deux théorèmes précédents, puisque $ABCD$ est un parallélogramme strict, il en va de même pour $ABFC$ puis pour $BEFC$.

46.1.4 Enoncé

Si $A_0A_1B_1B_0$ est un parallélogramme strict et si les A_n sont les graduations sur la droite (A_0A_1) de pas $[A_0A_1]$, si les B_n sont les graduations sur la droite (B_0B_1) de pas $[B_0B_1]$, alors $A_nA_{n+1}B_{n+1}B_n$ est un parallélogramme strict.

$$\forall\, A_0\; A_1\; B_0\; B_1, \forall\, n,\; \left.\begin{array}{l} A_0 \neq A_1\; \wedge \\ B_0 \neq B_1\; \wedge \\ \sharp^{\circlearrowright} A_0A_1B_1B_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sharp^{\circlearrowright}({}^{A_0}A_{1n})({}^{A_0}A_{1n+1})({}^{B_0}B_{1n+1})({}^{B_0}B_{1n}).$$

Figure : 

Démonstration La preuve se fait par récurrence sur n, en utilisant le théorème précédent dans le cas général.

Livre 13 : Les droites

A propos de ce tome : Jusqu'à maintenant, nous nous sommes surtout intéressés aux points. Mais nous avons maintenant tout le matériel utile pour travailler sur les propriétés des droites : droites superposées, droites sécantes, droites perpendiculaires et droites parallèles.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 47

Droites superposées

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `M1_SuperImposedLines.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

47.1 Définition

On dira que la droite δ_2 est **superposée** à la droite δ_1 si les points de construction de δ_2 sont sur δ_1.

Notation : $\delta_1 = \delta_2$.
Cette notation correspond à l'usage en géométrie, bien entendu, en *Coq*, il a fallu définir un prédicat et lui attribuer un identificateur (*EqLine*).

47.2 Exercices

- Deux points sont distincts si l'un est sur une droite et l'autre non (ex. 1).
- Si δ_2 est superposée à la droite δ_1, tout point de δ_1 est sur δ_2 (ex. 2).
- Si tout point de δ_2 est sur δ_1, δ_2 est superposée à la droite δ_1 (ex. 3).
- La relation de superposition est une relation d'équivalence sur les droites (ex. 4 à 6).
- La droite (AB) est superposée à elle-même quelles que soient les preuves de $A \neq B$ utilisées (ex. 7).
- La droite (AB) est superposée à la droite (BA) (ex. 8).
- Si δ_2 est superposée à la droite δ_1, si δ_1 est un diamètre du cercle γ, δ_2 l'est aussi (ex. 9).
- Si deux points distincts sont sur deux droites, celles-ci sont superposées (ex. 10).
- Si deux droites sont superposées, leurs points de constructions ont même direction ou sont de directions opposées (ex. 11).

- Si A et B sont deux points distincts d'une droite δ, tout point C colinéaire avec A et B est sur la droite δ (ex. 12).

Ex. 1: $\forall\ A\ B, \forall\ \delta, A \in \delta \wedge B \notin \delta \Rightarrow A \neq B.$

Ex. 2: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \forall\ M, \delta_1 = \delta_2 \wedge M \in \delta_1 \Rightarrow M \in \delta_2.$

Ex. 3: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, (\forall\ M, M \in \delta_2 \Rightarrow M \in \delta_1) \Rightarrow \delta_1 = \delta_2.$

Ex. 4: $\forall\ \delta, \delta = \delta.$

Ex. 5: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = \delta_1.$

Ex. 6: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3, \delta_1 = \delta_2 \wedge \delta_2 = \delta_3 \Rightarrow \delta_1 = \delta_3.$

Ex. 7: $\forall\ A\ B, \forall\ H_1 : A \neq B, \forall\ H_2 : A \neq B, (AB)_{H_1} = (AB)_{H_2}.$

Ex. 8: $\forall\ A\ B, \forall\ H_1 : A \neq B, \forall\ H_2 : B \neq A, (AB)_{H_1} = (BA)_{H_2}.$

Ex. 9: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \forall\ \gamma, \delta_1 = \delta_2 \wedge \delta_1 \oslash \gamma \Rightarrow \delta_2 \oslash \gamma.$

Ex. 10: $\forall\ A\ B, \forall\ \delta_1\ \delta_2, \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ A \in \delta_1\ \wedge \\ A \in \delta_2\ \wedge \\ B \in \delta_1\ \wedge \\ B \in \delta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_1 = \delta_2.$

Ex. 11: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \delta_1^{\lhd}\delta_1^{\rhd} \Rsh\Rsh\ \delta_2^{\lhd}\delta_2^{\rhd}\ \wedge \\ \delta_2^{\lhd}\delta_2^{\rhd} \Rsh\Rsh\ \delta_1^{\lhd}\delta_1^{\rhd} \end{array}\right. \\ \vee \\ \left\{\begin{array}{l} \delta_1^{\lhd}\delta_1^{\rhd} \Rsh\Rsh\ \delta_2^{\rhd}\delta_2^{\lhd}\ \wedge \\ \delta_2^{\lhd}\delta_2^{\rhd} \Rsh\Rsh\ \delta_1^{\rhd}\delta_1^{\lhd}. \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ex. 12: $\forall\ A\ B\ C, \forall\ \delta, \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ A \in \delta\ \wedge \\ B \in \delta\ \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow C \in \delta.$

Leçon 48

Droites parallèles

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `M2_ParallelLines.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Rappel : La notion de droites parallèles a été introduite dès la leçon 4 sur les droites avec pour définition : les couples de points de constructions ont même direction et pour notation : $\delta_1 \parallel \delta_2$. Nous allons énoncer quelques propriétés relatives aux droites parallèles et superposées, puis démonter un théorème et terminer par des propriétés liant parallélogrammes et droites parallèles.

48.1 Exercices

- La relation parallèle est reflexive et symétrique sur les droites (ex. 1 et 2) (la transitivité demandera plus de travail avant de pouvoir être montrée).
- Si δ_1 et δ_2 sont superposées, δ_1 et δ_2 sont parallèles (ex. 3).
- Si δ_1 et δ_2 sont parallèles et δ_2 et δ_3 sont superposées, δ_1 et δ_3 sont parallèles (on revient aux définitions et l'on procède par cas) (ex. 4).
- Si δ_1 et δ_3 sont superposées ainsi que δ_2 et δ_4, si δ_1 et δ_2 sont parallèles alors δ_3 et δ_4 le sont aussi (ex. 5).

Ex. 1: $\forall\ \delta, \delta \parallel \delta.$

Ex. 2: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \parallel \delta_2 \Rightarrow \delta_2 \parallel \delta_1.$

Ex. 3: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \delta_1 \parallel \delta_2.$

Ex. 4: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3, \delta_1 \parallel \delta_2 \wedge \delta_2 = \delta_3 \Rightarrow \delta_1 \parallel \delta_3.$

Ex. 5: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4,\ \left.\begin{array}{l} \delta_1 = \delta_3\ \wedge \\ \delta_2 = \delta_4\ \wedge \\ \delta_1 \parallel \delta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_3 \parallel \delta_4.$

48.2 Théorème

Deux droites parallèles ayant un point commun sont superposées.

Enoncé $\forall\ M, \forall\ \delta_1\ \delta_2\ \left.\begin{array}{l} M \in \delta_1\ \wedge \\ M \in \delta_2\ \wedge \\ \delta_1 \parallel \delta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_1 = \delta_2.$

Démonstration Soient A et B les points de construction de δ_2, M est distinct d'au moins un de ces deux points :

- $A \neq M$:
  Les droites (AM) et (AB) sont superposées donc δ_1 est parallèle à (AM) (ex. 4), il reste à montrer $\delta_1 = (AM)$.
  Soient A_0 et B_0 les points de constructions de δ_1, raisonnons par cas sur les positions des trois points A_0, B_0 et A :

  – $\circlearrowright A_0B_0A$:
    les points (A_0, B_0) et (A, M) n'ont pas la même direction (th. de la leçon 23) ce qui est contradictoire avec δ_1 parallèle à (AM).

  – $\circlearrowright B_0A_0A$:
    les points (B_0, A_0) et (A, M) n'ont pas la même direction (th. de la leçon 23) ce qui est contradictoire avec δ_1 parallèle à (AM).

  – $\overline{A_0B_0A}$:
    par définition $\delta_1 = (AM)$.

- $B \neq M$: Les droites (BM) et (AB) sont superposées donc δ_1 est parallèle à (BM) (ex. 4), il reste à montrer $\delta_1 = (BM)$.
  Soient A_0 et B_0 les points de constructions de δ_1, raisonnons par cas sur les positions des trois points A_0, B_0 et B :

  – $\circlearrowright A_0B_0B$:
    les points (A_0, B_0) et (B, M) n'ont pas la même direction (th. de la leçon 23) ce qui est contradictoire avec δ_1 parallèle à (BM).

  – $\circlearrowright B_0A_0B$:
    les points (B_0, A_0) et (B, M) n'ont pas la même direction (th. de la leçon 23) ce qui est contradictoire avec δ_1 parallèle à (BM).

  – $\overline{A_0B_0B}$:
    par définition $\delta_1 = (BM)$.

Corollaire : Etant données deux droites parallèles, s'il existe un point appartenant à l'une et non à l'autre, alors les droites n'ont aucun point commun.

Enoncé : $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \forall\ A,\ \left.\begin{array}{l} \delta_1 \parallel \delta_2\ \wedge \\ A \in \delta_1\ \wedge \\ A \notin \delta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\ M, \neg(M \in \delta_1 \wedge M \in \delta_2).$

48.3 Côtés opposés d'un parallélogramme

Exercices

- Si $ABCD$ est un parallélogramme avec $A \neq B$ et $C \neq D$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles (ex. 6).
- Deux droites dont les points de construction sont les quatre sommets d'un parallélogramme sont parallèles (ex. 7).

$$\text{Ex. 6: } \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ C \neq D\ \wedge \\ \sharp ABCD \end{array}\right\} \Rightarrow (AB) \parallel (CD).$$

Ex. 7: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \sharp\delta_1^{\triangleright}\delta_1^{\triangleleft}\delta_2^{\triangleright}\delta_2^{\triangleleft} \Rightarrow \delta_1 \parallel \delta_2$.

Leçon 49

Droites sécantes

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `M2_SecantLines.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Rappel : La notion de droites sécantes a été introduite dans la leçon 4 comme la négation de droites parallèles.

49.1 Exercices

- Deux droites ayant un point commun et un point appartenant à l'une mais pas à l'autre sont sécantes (ex. 1).
- Si δ_1 et δ_2 sont superposées et δ_1 et δ_3 sont sécantes, δ_2 et δ_3 sont sécantes (ex. 2).
- Si δ_1 et δ_2 sont superposées ainsi que δ_3 et δ_4, si δ_1 et δ_3 sont sécantes alors δ_2 et δ_4 le sont aussi (ex. 3).
- Deux droites superposées ne sont pas sécantes et réciproquement (ex. 4 et 5).
- Si A et B sont deux points de la droite δ_1 et C et D deux points de la droite δ_2, si (A, B, C) sont dextrogyres et (A, B, D) ne le sont pas, alors δ_1 et δ_2 sont sécantes (ex. 6).

Ex. 1: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \forall\ A\ B,\ \left.\begin{array}{l} A \in \delta_1\ \wedge \\ A \in \delta_2\ \wedge \\ B \in \delta_1\ \wedge \\ B \notin \delta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_1 \nparallel \delta_2.$

Ex. 2: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3, \delta_1 = \delta_2 \wedge \delta_1 \nparallel \delta_3 \Rightarrow \delta_2 \nparallel \delta_3.$

Ex. 3: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4,\ \left.\begin{array}{l} \delta_1 = \delta_2\ \wedge \\ \delta_3 = \delta_4\ \wedge \\ \delta_1 \nparallel \delta_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_2 \nparallel \delta_4.$

Ex. 4: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \neg(\delta_1 \nparallel \delta_2).$

Ex. 5: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \nparallel \delta_2 \Rightarrow \delta_1 \neq \delta_2$.

Ex. 6: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \in \delta_1 \wedge \\ B \in \delta_1 \wedge \\ C \in \delta_2 \wedge \\ D \in \delta_2 \wedge \\ \circlearrowright ABC \wedge \\ \not\circlearrowright ABD \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_1 \nparallel \delta_2$.

Leçon 50

Droites perpendiculaires

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `M2_PerpendicularLines.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

50.1 Définition

On dira que les droites δ_1 et δ_2 sont **perpendiculaires** s'il existe trois points A, B et C tels que A et B soient sur δ_1, B et C soient sur δ_2 et l'angle $\widehat{ABC}$ soit droit.

Notation

$$\delta_1 \perp \delta_2 \Leftrightarrow \exists\ A\ B\ C, \begin{cases} A \in \delta_1\ \wedge \\ B \in \delta_1\ \wedge \\ B \in \delta_2\ \wedge \\ C \in \delta_2\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}. \end{cases}$$

Remarque D'une telle définition, il vient immédiatement que des droites perpendiculaires sont sécantes (ex. 3), on utilisera la notation usuelle pour le point d'intersection $\delta_1 \cap\!\!\cdot\ \delta_2$ (alors qu'en *Coq* un nouvel identificateur est utilisé).

50.2 Exercices

- La relation perpendiculaire est symétrique (ex. 1).
- Si δ_1 et δ_2 sont superposées ainsi que δ_3 et δ_4, si δ_1 et δ_3 sont perpendiculaires alors δ_2 et δ_4 le sont aussi (ex. 2).
- Deux droites perpendiculaires sont sécantes, elles définissent un point d'intersection, ce point appartient aux deux droites et tout point commun aux deux droites est égal à ce point (ex. 3 à 6).

Ex. 1: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \perp \delta_2 \Rightarrow \delta_2 \perp \delta_1$.

Ex. 2: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4,\ \left.\begin{array}{l}\delta_1 = \delta_2 \wedge \\ \delta_3 = \delta_4 \wedge \\ \delta_1 \perp \delta_3\end{array}\right\} \Rightarrow \delta_2 \perp \delta_4.$

Ex. 3: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \perp \delta_2 \Rightarrow \delta_1 \between \delta_2.$

Ex. 4: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \perp \delta_2 \Rightarrow (\delta_1 \dot{\cap}\ \delta_2) \in \delta_1.$

Ex. 5: $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \delta_1 \perp \delta_2 \Rightarrow (\delta_1 \dot{\cap}\ \delta_2) \in \delta_2.$

Ex. 6: $\forall\ M, \forall\ \delta_1\ \delta_2,\ \left.\begin{array}{l}\delta_1 \perp \delta_2 \wedge \\ M \in \delta_1 \wedge \\ M \in \delta_2\end{array}\right\} \Rightarrow M = \delta_1 \dot{\cap}\ \delta_2.$

50.3 Théorème

Lemme préliminaire Etant donnés deux droites δ_1 et δ_2 perpendiculaires, un point A de δ_1 distinct du point d'intersection, un point B de δ_2 distinct du point d'intersection, l'angle $\widehat{A(\delta_1 \dot{\cap}\ \delta_2)B}$ est droit.

Enoncé $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \forall\ A\ B,\ \left.\begin{array}{l}\delta_1 \perp \delta_2 \wedge \\ A \neq \delta_1 \dot{\cap}\ \delta_2 \wedge \\ B \neq \delta_1 \dot{\cap}\ \delta_2 \wedge \\ A \in \delta_1 \wedge \\ B \in \delta_2\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A(\delta_1 \dot{\cap}\ \delta_2)B} \equiv \widehat{V}.$

Démonstration Soient A_0, B_0 et C_0 les points correspondant à la définition de $\delta_1 \perp \delta_2$, donc $A_0 \in \delta_1$, $B_0 \in \delta_1$, $B_0 \in \delta_2$, $C_0 \in \delta_2$ et $\widehat{A_0B_0C_0} \equiv \widehat{V}$. Il vient immédiatement que B_0 est le point d'intersection de δ_1 et δ_2, que A, A_0 et B_0 sont colinéaires ainsi que B, B_0 et C_0. On va distinguer les cas suivant l'ordre de ces points colinéaires, selon les cas les angles $\widehat{A_0B_0C_0}$ et $\widehat{AB_0B}$ seront les mêmes, supplémentaires ou opposés, donc toujours congruents d'où la conclusion.

Théorème Etant donnés deux droites δ_1 et δ_2 perpendiculaires et trois points A, B et C, si A et B sont distincts et sur δ_1, B et C distincts et sur δ_2, alors l'angle $\widehat{ABC}$ est droit.

Enoncé $\forall\ \delta_1\ \delta_2, \forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l}\delta_1 \perp \delta_2 \wedge \\ A \neq B \wedge \\ C \neq B \wedge \\ A \in \delta_1 \wedge \\ B \in \delta_1 \wedge \\ B \in \delta_2 \wedge \\ C \in \delta_2\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}.$

Démonstration Comme B est le point d'intersection de δ_1 et δ_2 (ex. 6), il suffit d'appliquer le lemme.

50.4 Perpendicularité de la médiatrice

Théorème La médiatrice de $[AB]$ est perpendiculaire à (AB).

Enoncé : $\forall\ A\ B, A \neq B \Rightarrow (AB) \perp (A \dagger B)$.

Démonstration : Il suffit d'appliquer la définition de perpendiculaire à ces deux droites avec les points A, $(A \mid B)$ et le premier point de construction de $(A \dagger B)$.

Livre 14 : Constructions de droites

A propos de ce tome : De même que nous avions défini des constructions de points, nous définissons des constructions de droites. Jusqu'à maintenant, nous ne l'avions fait que pour la médiatrice, qui nous était nécessaire pour définir milieu et angle droit. Nous allons tracer désormais perpendiculaires et paralléles à une droite passant par un point. Toutefois, conformément à l'option constructive, les constructions ne peuvent dépendre d'une propriété disjonctive. C'est pourquoi nous distinguerons les constructions selon que le point appartienne ou non à la droite.

La construction de la parallèle à une droite passant par un point va nous permettre de démontrer l'unicité de la parallèle (axiome d'Euclide) à l'aide de l'axiome de la somme des angles d'un triangle.

L'ensemble de ces énoncés peuvent être retrouvés dans les fichiers *Coq* mentionnés avec leurs démonstrations dans le langage de *Coq*.

Leçon 51

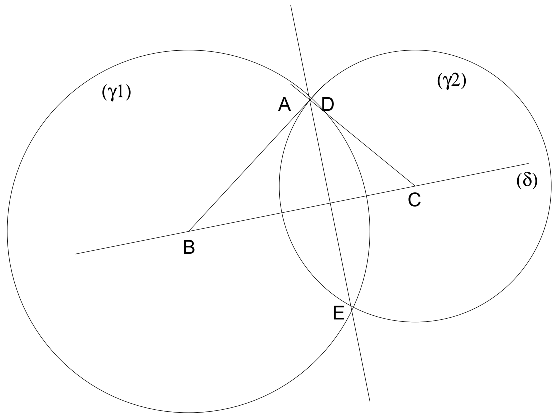
Tracés de perpendiculaires

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `N1_DrawingPerpendicularLines.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

51.1 Abaisser une perpendiculaire

Construction Soit une droite δ et un point A n'appartenant pas à δ. On construit la perpendiculaire à δ passant par A de la manière suivante :

- Soient B et C les points de construction de δ.
- Soit γ_1 le cercle de centre B et de rayon BA.
- Soit γ_2 le cercle de centre C et de rayon CA.
- Les cercles γ_1 et γ_2 sont sécants puisque ABC est un triangle.
- Soit D le point d'intersection de γ_1 et γ_2.
- Soit E le point d'intersection de γ_2 et γ_1.
- Les points D et E sont distincts, car A n'étant pas colinéaire avec B et C, on a les deux cas :
  - $\circlearrowleft BCA$, alors $A = E$ et $A <> D$,
  - $\circlearrowleft CBA$, alors $A = D$ et $A <> E$.
- La droite (DE) est la droite recherchée.



Notation : On notera cette droite $(\perp^A \delta)$.

Exercices

- La droite ainsi construite passe par A (car $A = D$ ou $A = E$) (ex. 1)
- La droite ainsi construite est perpendiculaire à δ (car (BC) est la médiatrice de $[DE]$) (ex. 2)

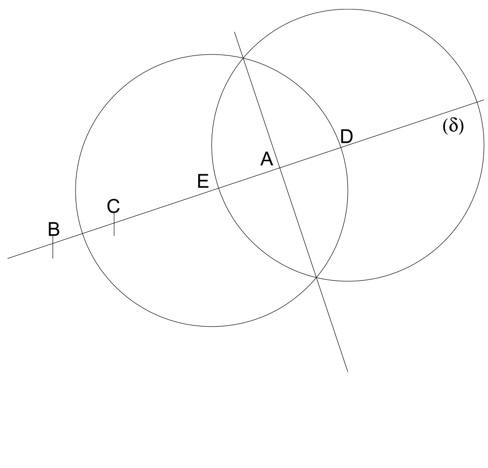
Ex. 1: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \Rightarrow A \in (\perp^A \delta)$.

Ex. 2: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \Rightarrow (\perp^A \delta) \perp \delta$.

51.2 Elever une perpendiculaire

Construction Soit une droite δ et un point A appartenant à δ. On construit la perpendiculaire à δ passant par A de la manière suivante :

- Soient B et C les points de construction de δ.
- Soit D le point de (BC) à distance BC de A.
- Soit E le symétrique de D par rapport à A.
- La droite recherchée est la médiatrice de $[DE]$.



Notation : On notera cette droite $(\perp_A \delta)$.

Exercices

- La droite ainsi construite passe par A (car A est le milieu de $[DE]$) (ex. 3)
- La droite ainsi construite est perpendiculaire à δ (ex. 4)

Ex. 3: $\forall \delta, \forall A, A \in \delta \Rightarrow A \in (\perp_A \delta)$.

Ex. 4: $\forall \delta, \forall A, A \in \delta \Rightarrow (\perp_A \delta) \perp \delta$.

Leçon 52

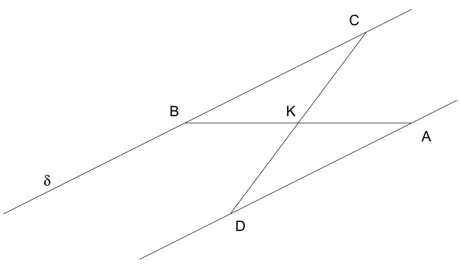
Tracé de parallèle

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `N2_DrawingParallelLine.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

52.1 Parallèle passant par un point

Construction Soit une droite δ et un point A n'appartenant pas à δ. On construit la parallèle à δ passant par A de la manière suivante :

- Soient B et C les points de construction de δ.
- Soit K le milieu de $[BA]$ ($B \neq A$ car $A \notin \delta$).
- Soit D le symétrique de C par rapport à K ($C \neq K$ sinon (A, B, C) seraient colinéaires).
- Les points D et A sont distincts, sinon (C, K, A) seraient colinéaires et $B = C$.
- La droite (AD) est la droite recherchée.



Notation : On notera cette droite $(\|^A\ \delta)$.

Exercices

- A est le premier point de construction de la droite ainsi construite et donc elle passe par A (ex. 1 et 2)

- Si (B, C, A) est dextrogyre, $BCAD$ est un parallélogramme (ex. 3).
- Si (C, B, A) est dextrogyre, $CBDA$ est un parallélogramme (ex. 4).
- La droite ainsi construite est parallèle à δ (conséquence des deux exercices précédents) (ex. 5)
- La droite ainsi construite n'est pas sécante avec δ (ex. 6)
- Si (B, C, A) est dextrogyre, le second point de construction de la droite ainsi construite est le quatrième sommet du parallélogramme strict construit sur BCA (ex. 7).
- Si (A, C, B) est dextrogyre, le second point de construction de la droite ainsi construite est le quatrième sommet du parallélogramme strict construit sur ACB (ex. 8).

Ex. 1: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \Rightarrow (\|^A \delta)^{\triangleright} = A.$

Ex. 2: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \Rightarrow A \in (\|^A \delta).$

Ex. 3: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \wedge \circlearrowleft \delta^{\triangleright} \delta^{\triangleleft} A \Rightarrow \sharp \delta^{\triangleright} \delta^{\triangleleft} (\|^A \delta)^{\triangleright} (\|^A \delta)^{\triangleleft}.$

Ex. 4: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \wedge \circlearrowleft \delta^{\triangleleft} \delta^{\triangleright} A \Rightarrow \sharp \delta^{\triangleleft} \delta^{\triangleright} (\|^A \delta)^{\triangleleft} (\|^A \delta)^{\triangleright}.$

Ex. 5: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \Rightarrow \delta \parallel (\|^A \delta).$

Ex. 6: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \Rightarrow \neg(\delta \nparallel (\|^A \delta)).$

Ex. 7: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \wedge \circlearrowleft \delta^{\triangleright} \delta^{\triangleleft} A \Rightarrow (\|^A \delta)^{\triangleleft} = \sharp^{\circlearrowleft 4} \delta^{\triangleright} \delta^{\triangleleft} A_{-}.$

Ex. 8: $\forall \delta, \forall A, A \notin \delta \wedge \circlearrowleft \delta^{\triangleleft} \delta^{\triangleright} A \Rightarrow (\|^A \delta)^{\triangleleft} = \sharp^{\circlearrowleft 4} A \delta^{\triangleleft} \delta^{\triangleright}{}_{-}.$

Leçon 53

Parallèle de droites opposées

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `N3_ParallelOpposedLine.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.
Nous savons déjà que les droites (AB) et (BA), qui sont des constructions distinctes à la règle (leçon 4), sont superposées (ex. 8 leçon 47). On va montrer que les parallèles passant par C aux droites (AB) et (BA) sont superposées; on va procéder en deux temps avec un lemme préliminaire.

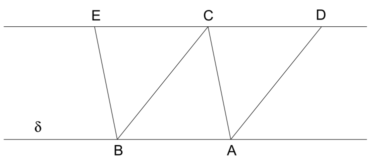
53.1 Lemme préliminaire

Soient une droite (AB) et un point C n'appartenant pas à la droite, si (A, B, C) est dextrogyre, il existe deux points D et E sur la parallèle à (AB) passant par C tels que $ABCD$ est un parallélogramme strict ainsi que $CABE$ et C est situé entre D et E.

Enoncé :

$$\forall \delta, \forall C, \quad \left.\begin{array}{l} C \notin \delta \ \wedge \\ \circlearrowright \ \delta^{\triangleright}\delta^{\triangleleft}C \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \ D \ E, \left\{\begin{array}{l} \sharp^{\circlearrowright}\delta^{\triangleright}\delta^{\triangleleft}CD \ \wedge \\ \sharp^{\circlearrowright}C\delta^{\triangleright}\delta^{\triangleleft}E \ \wedge \\ D - C - E \ \wedge \\ D \in (\|^{C} \ \delta) \ \wedge \\ E \in (\|^{C} \ \delta). \end{array}\right.$$

.

Figure : 

Démonstration :

- Soit D le quatrième sommet du parallélogramme strict construit sur $\delta^{\triangleright}\delta^{\triangleleft}C$.

- Soit E le quatrième sommet du parallélogramme strict construit sur $C\delta^{\triangleright}\delta^{\triangleleft}$.
- En appliquant l'exercice 13 de la leçon 3 sur $\delta^{\triangleright}, \delta^{\triangleleft}, C, D, \delta^{\triangleright}, \delta^{\triangleleft}, E$ il vient $D - C - E$.
- $D \in (\|^C \delta)$ car D est le second point de construction de la parallèle à δ passant par C (ex. 7 leçon 52).
- $E \in (\|^C \delta)$ car $D - C - E$ et C et D sont les points de construction de $(\|^C \delta)$.

53.2 Théorème

Soient A, B et C trois points non alignés, les parallèles passant par C aux droites (AB) et (BA) sont superposées.

Enoncé :

$$\forall\ A\ B\ C, \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ B \neq A\ \wedge \\ C \notin (AB)\ \wedge \\ C \notin (BA) \end{array}\right\} \Rightarrow \|^C (AB) = \|^C (BA).$$

.

Remarque : Les hypothèses sont nettement redondantes, mais il faut une preuve de $A \neq B$ pour définir (AB) et une preuve de $B \neq A$ pour définir (BA) et ces preuves peuvent être indépendantes, de même, il faut une preuve de $C \notin (AB)$ pour définir $\|^C (AB)$ et une preuce de $C \notin (BA)$ pour définir $\|^C (BA)$ et ces preuves peuvent être indépendantes. L'énoncé textuel du théorème, plus simple, serait une conséquence immédiate de l'énoncé mathématique puisque toutes les prémisses peuvent se déduire de A, B et C trois points non alignés.

Démonstration : Puisque les trois points A, B et C ne sont pas alignés, on distingue les deux cas :

- $\circlearrowright ABC$:
  On applique le lemme précédent avec la droite (AB).
  On va montrer que les deux droites $\|^C (AB)$ et $\|^C (BA)$ passent toutes deux par les deux points distincts C et E (distincts puisque $CABE$ est un parallélogramme strict).
  Le point C appartient aux deux droites par construction.
  Le point E appartient à $\|^C (AB)$ comme résultat du lemme.
  Le point E est le quatrième sommet du parallélogramme strict $CABE$, il est donc le second point de construction de la droite $\|^C (BA)$. D'où la conclusion.
- $\circlearrowright BAC$:
  On applique le lemme précédent avec la droite (BA).
  On va montrer que les deux droites $\|^C (AB)$ et $\|^C (BA)$ passent toutes deux par les deux points distincts C et E (distincts puisque $CABE$ est un parallélogramme strict).

Le point C appartient aux deux droites par construction.
Le point E appartient à $\|^{C}$ (BA) comme résultat du lemme.
Le point E est le quatrième sommet du parallélogramme strict $CABE$, il est donc le second point de construction de la droite $\|^{C}$ (AB). D'où la conclusion.

Leçon 54

Faisceau de droites parallèles

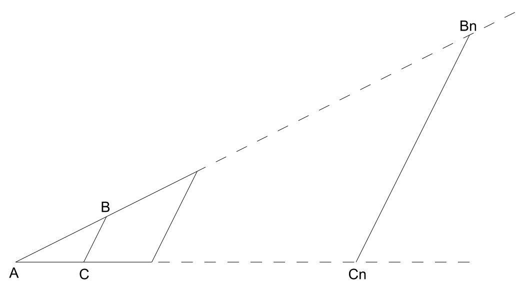
Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `N4_DiscreteThales.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.
Il a pour objectif de préparer la preuve que toute droite ni sécante, ni superposée à une droite donnée lui est parallèle. Il contient trois théorèmes, mais les deux derniers sont le même résultat pour deux orientations différentes des points de départ.

54.1 Théorème 1

Soient trois points A, B et C avec (A, B, C) dextrogyre et soit n un entier naturel strictement positif, alors en appelant B_n la nième graduation sur la droite (AB) et C_n la nième graduation sur la droite (AC), on a les propriétés suivantes :

- (A, B_n, C_n) est dextrogyre,
- les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AB_nC_n}$ sont congruents,
- les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AC_nB_n}$ sont congruents,
- la distance B_nC_n est égale à $n * BC$.

Figure :



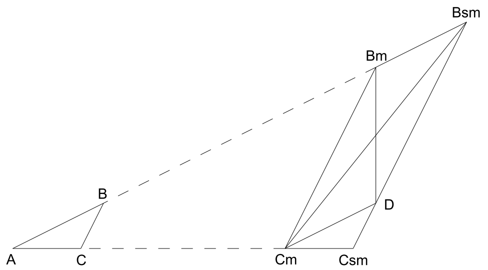
Enoncé :

$$\forall\ A\ B\ C,\ \forall\ n,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ A \neq C\ \wedge \\ \circlearrowright ABC\ \wedge \\ n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \circlearrowright A({}^A B_n)({}^A C_n)\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{A({}^A B_n)({}^A C_n)}\ \wedge \\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{A({}^A C_n)({}^A B_n)}\ \wedge \\ ({}^A B_n)({}^A C_n) = n * BC. \end{array}\right.$$

.

Démonstration : On raisonne par récurrence :

- $n = 1$
  Comme $B_n = B$ et $C_n = C$, le résultat est immédiat.
- supposons la conjonction vraie pour m et montrons la pour $m+1$:
  - Notons B_m et B_{sm} les mième et (m+1)ième graduations sur la droite (AB) et C_m et C_{sm} les mième et (m+1)ième graduations sur la droite (AC).



  - On sait que $A{-}B_m{-}B_{sm}$ (ex. 12, leçon 27), on en déduit (C_m, B_m, B_{sm}) est dextrogyre.
  - On construit le parallélogramme strict $C_mB_mB_{sm}D$, on en déduit l'égalité $\widehat{DB_{sm}B_m} \equiv \widehat{C_mB_mA}$.
  - Montrons $A\overset{\triangle}{B}C \equiv C_m\overset{\triangle}{D}C_{sm}$. En effet, $CA = C_{sm}C_m$ (ex. 4, leçon 27), $AB = B_mB_{sm} = C_mD$, et $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C_{sm}C_mD}$ qui demande un peu plus de travail pour être établie :
    - $\widehat{C_{sm}C_mD} \lessdot \widehat{DC_mA}$ car $A - C_m - C_{sm}$ (ex. 12, leçon 27);
    - $\widehat{CAB} \lessdot \widehat{DC_mA}$ car (ex. 15, leçon 35) $\circlearrowright C_mAB_m$, $\circlearrowright C_mB_mD$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC_mB_m}$ et $\widehat{CBA} \equiv \widehat{AB_mC_m} \equiv \widehat{B_mC_mD}$.
  - Pour les mêmes raisons, on a $\circlearrowright C_mDC_{sm}$ car (ex. 16, leçon 35) $\circlearrowright C_mAB_m$, $\circlearrowright C_mB_mD$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC_mB_m}$ et $\widehat{CBA} \equiv \widehat{B_mC_mD}$ et $A - C_m - C_{sm}$.
  - On en déduit (ex. 7, leçon 35) que $B_{sm} - D - C_{sm}$ car $\not\circlearrowright C_mDB_{sm}$, $\not\circlearrowright C_{sm}DC_m$ et $\widehat{C_mDC_{sm}} \lessdot \widehat{B_{sm}DC_m}$ qui demande un peu plus de travail pour être établie :
    - $\widehat{C_mDC_{sm}} \equiv \widehat{ABC}$ puisque $A\overset{\triangle}{B}C \equiv C_m\overset{\triangle}{D}C_{sm}$,
    - $\widehat{ABC} \equiv \widehat{AB_mC_m}$ par hypothèse de récurrence,

  * $B_{sm}\widehat{DC}_m \equiv C_m\widehat{B_m}B_{sm}$ car $\sharp^{\circlearrowright}C_mB_mB_{sm}D$,
  * et $A\widehat{B_mC}_m \leftthreetimes C_m\widehat{B_mB}_{sm}$ également car $\sharp^{\circlearrowright}C_mB_mB_{sm}D$.
- On peut désormais conclure :
  * $\circlearrowright AB_{sm}C_{sm}$ car $B_{sm}-D-C_{sm}$ et $\circlearrowright DC_{sm}A$ car $A-C_m-C_{sm}$ et $\circlearrowright C_mDC_{sm}$;
  * $\widehat{ABC} \equiv A\widehat{B_{sm}C}_{sm}$ car $\widehat{ABC} \equiv A\widehat{B_mC}_m$ et $A\widehat{B_mC}_m \equiv B_m\widehat{B_{sm}}D$ (angle extérieur de $\sharp^{\circlearrowright}C_mB_mB_{sm}D$);
  * $\widehat{ACB} \equiv A\widehat{C_{sm}B}_{sm}$ car $\widehat{ACB} \equiv C_m\widehat{C_{sm}}D$ ($\overset{\triangle}{ABC} \equiv C_m\overset{\triangle}{DC}_{sm}$) ;
  * $B_{sm}C_{sm} = BC + m * BC$ car $m * BC = B_mC_m$ par hypothèse de récurrence et $B_mC_m = B_{sm}D$ comme côtés opposés de parallélogramme, et $DC_{sm} = BC$ car $\overset{\triangle}{ABC} \equiv C_m\overset{\triangle}{DC}_{sm}$, il ne reste plus qu'à appliquer Chasles puisque $B_{sm} - D - C_{sm}$.

54.2 Théorème 2

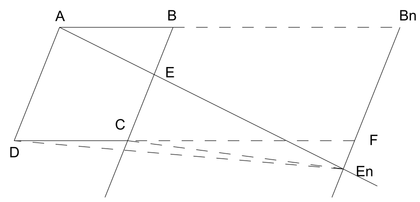
Soient $ABCD$ un parallélogramme strict et un point E compris entre B et C, il existe un point M colinéaire avec A et E tel que (D, C, M) soit dextrogyre.

Enoncé :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l}\sharp^{\circlearrowright}ABCD\ \wedge\\ B-E-C\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists\ M,\\ \overline{AEM}\ \wedge\\ \circlearrowright DCM.\end{array}\right.$$

.

Figure :



Démonstration :

- Comme $B \neq E$, il existe un entier $n > 0$ tel que $BC < n * BE$ (ex. 6 leçon 21).
- En appelant B_n la nième graduation sur la droite (AB) et E_n la nième graduation sur la droite (AE), en appliquant le lemme précédent aux points A, B et E et à l'entier n, il vient les hypothèses suivantes :
  - $\circlearrowright AB_nE_n$
  - $\widehat{ABE} \equiv A\widehat{B_nE}_n$
  - $\widehat{AEB} \equiv A\widehat{E_nB}_n$
  - $B_nE_n = n * BE$.
- Soit F le quatrième sommet du parallélogramme strict DAB_nF. Montrons que $F \in]B_nE_n)$.

- Montrons $\widehat{AB_nE_n} \equiv \widehat{AB_nF}$. $\widehat{ABC} \equiv \widehat{AB_nF}$ car ils sont supplément de $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DAB_n}$. D'où $\widehat{AB_nE_n} \equiv \widehat{ABE} \equiv \widehat{ABC} \equiv \widehat{AB_nF}$.
- Comme $\circlearrowright AB_nE_n$ et $\circlearrowright AB_nF$, il vient $F \in]B_nE_n)$ (ex. 3 leçon 29).
- Comme $B_nF = BC < n * BE = B_nE_n$, F est situé entre B_n et E_n (ex. 3 leçon 21).
- Le point E_n répond à la question car il est colinéaire avec A et E et que

$$\sharp^{\circlearrowright} DAB_nF \Rightarrow \circlearrowright DB_nF \Rightarrow \circlearrowright DFE_n \Rightarrow \circlearrowright DCE_n.$$

54.3 Théorème 3

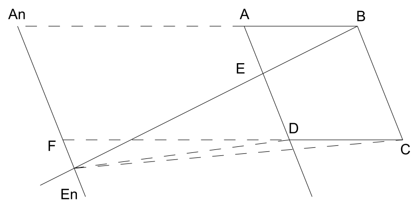
Soient $ABCD$ un parallélogramme strict et un point E compris entre A et D, il existe un point N colinéaire avec B et E tel que (D, C, N) soit dextrogyre.

Enoncé :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E,\ \left.\begin{array}{l} \sharp^{\circlearrowright} ABCD \wedge \\ A - E - D \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ N, \\ \overline{BEN} \wedge \\ \circlearrowright DCN. \end{array}\right.$$

.

Figure :



Démonstration : La démonstration est très semblable à la précédente, seule l'orientation s'est inversée.

Leçon 55

Unicité de la parallèle

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `N5_UniqueParallel.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.
On va montrer que deux droites sécantes ne peuvent être toutes deux parallèles à une même troisième.

55.1 Autre énoncé du théorème de Pasch

Soient quatre points A, B, C et D et une droite δ, si A, B et C ne sont ni alignés, ni sur δ et que le point D est situé entre A et B et sur δ, alors soit il existe un point E de δ situé entre A et C, soit un point F de δ entre B et C.

Enoncé :

$$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \forall\ \delta,\ \left.\begin{array}{l} \neg\overline{ABC} \wedge \\ A - D - B \wedge \\ D \in \delta \wedge \\ A \notin \delta \wedge \\ B \notin \delta \wedge \\ C \notin \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ E, A - E - C \wedge E \in \delta \vee \\ \exists\ F, B - F - C \wedge F \in \delta \end{array}\right.$$

.

Démonstration : Soient A_0 et B_0 les points de construction de δ, on raisonne par cas selon que D est distinct de A_0 ou de B_0 et que (A, B, C) est dextrogyre ou sinistrogyre. Dans chaque cas, on applique le théorème de Pasch (leçon 24, § 4).

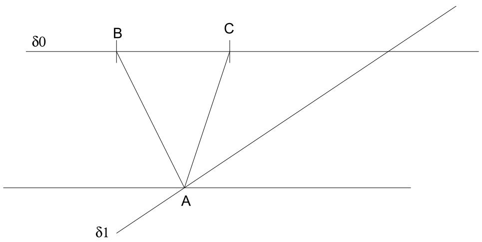
55.2 Lemme préliminaire

Soient δ_0 et δ_1 deux droites et A un point sur δ_1 et non sur δ_0. Si les points de construction de δ_0 ne sont pas sur δ_1 et sont dextrogyres avec A, si δ_1 est sécante avec la parallèle à δ_0 passant par A, alors δ_1 est sécante avec δ_0.

Enoncé :

$$\forall\ A,\ \forall\ \delta_0\ \delta_1,\ \left.\begin{array}{l} A \notin \delta_0\ \wedge \\ A \in \delta_1\ \wedge \\ \delta_0^{\triangleright} \notin \delta_1\ \wedge \\ \delta_0^{\triangleleft} \notin \delta_1\ \wedge \\ \circlearrowright\ \delta_0^{\triangleright}\delta_0^{\triangleleft}A\ \wedge \\ \delta_1 \nparallel (\|^{A}\ \delta_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_0 \nparallel \delta_1.$$

Figure :



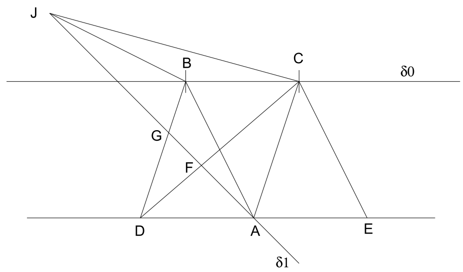
Démonstration :

- Soient B et C les points de construction de δ_0 et δ_2 la parallèle à δ_0 passant par A. On applique le lemme préliminaire de la leçon 53 à la droite δ_0 et au point A, il existe donc deux points D et E sur δ_2 passant par A tels que $BCAD$ est un parallélogramme strict ainsi que $ABCE$ et A est situé entre D et E.

- On applique le thérème de Pasch aux points D, E, C, A et à la droite δ_1. On a donc deux cas :

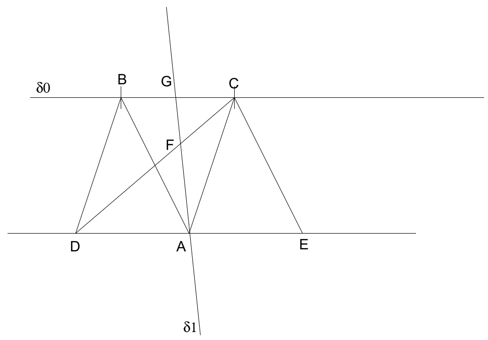
  - il existe un point F de δ_1 compris entre C et D. On applique à nouveau le thérème de Pasch aux points D, C, B, F et à la droite δ_1. On a donc deux cas :

    * il existe un point G de δ_1 compris entre B et D.

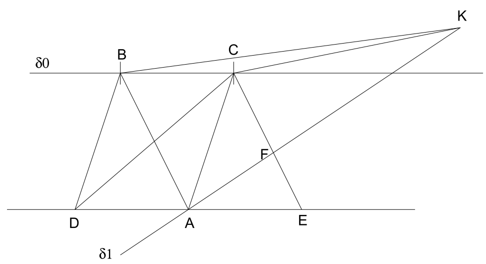
      On applique le théorème 2 de la leçon 54, il existe un point J colinéaire avec A et G tel que (C, B, J) soit dextrogyre. On en déduit que les droites δ_1 et δ_0 sont sécantes puisque la première a deux points A et J d'orientation différentes avec les points de construction B et C de la seconde.

    * il existe un point G de δ_1 compris entre B et C.



Les droites δ_1 et δ_0 sont donc sécantes en G.

– il existe un point F de δ_1 compris entre C et E.



On applique le théorème 3 de la leçon 54, il existe un point K colinéaire avec A et F tel que (C, B, K) soit dextrogyre. On en déduit que les droites δ_1 et δ_0 sont sécantes puisque la première a deux points A et K d'orientation différentes avec les points de construction B et C de la seconde.

55.3 Théorème

Soient δ_0 et δ_1 deux droites et A un point sur δ_1 et non sur δ_0. Si δ_1 est sécante avec la parallèle à δ_0 passant par A, alors δ_1 est sécante avec δ_0.

Enoncé :

$$\forall\ A,\ \forall\ \delta_0\ \delta_1,\ \left.\begin{array}{l} A \notin \delta_0 \wedge \\ A \in \delta_1 \wedge \\ \delta_1 \nparallel (\|^A\ \delta_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_0 \nparallel \delta_1.$$

Démonstration : Soient B et C les points de construction de δ_0. On distingue deux cas selon que B est ou non sur δ_1 (il s'agit d'établir une propriété pas de faire une construction car nous n'avons pas de méthode constructive pour distinguer ces deux cas):

- Si B est sur δ_1 les deux droites sont sécantes en B.

- Si B n'est pas sur δ_1, on distingue deux cas selon que C est ou non sur δ_1:
  - Si C est sur δ_1 les deux droites sont sécantes en C.
  - Si C n'est pas sur δ_1, on distingue selon l'orientation de (B, C, A):
    - Si $\circlearrowright BCA$, on applique le lemme précédent à δ_0 et δ_1.
    - Si $\circlearrowleft CBA$, on remarque que les droites $\delta_0 = (BC)$ et (CB) sont superposées et on applique le lemme précédent à (CB) et δ_1.

55.4 Théorème

Soient δ_0 et δ_1 deux droites et A un point sur δ_1 et non sur δ_0. Si δ_1 est parallèle à δ_0, alors δ_1 est superposée à la parallèle à δ_0 passant par A.

Enoncé :

$$\forall\ A,\ \forall\ \delta_0\ \delta_1,\ \left.\begin{array}{l} A \notin \delta_0 \wedge \\ A \in \delta_1 \wedge \\ \delta_0 \parallel \delta_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_1 = (\|^A\ \delta_0).$$

Démonstration : Soient B et C les points de construction de δ_1. On distingue deux cas selon que A est distinct de B ou de C :

- Si A est distinct de B, on distingue deux cas selon que B est ou non sur la parallèle à δ_0 passant par A :
  - Si B est sur $\|^A\ \delta_0$, les deux droites sont superposées car elles ont deux points distincts communs.
  - Si B n'est pas sur $\|^A\ \delta_0$, les deux droites sont sécantes. En appliquant le théorème précédent, on a une contradiction : δ_0 et δ_1 seraient à la fois parallèles et sécantes.
- Si A est distinct de C, on distingue deux cas selon que C est ou non sur la parallèle à δ_0 passant par A :
  - Si C est sur $\|^A\ \delta_0$, les deux droites sont superposées car elles ont deux points distincts communs.
  - Si C n'est pas sur $\|^A\ \delta_0$, les deux droites sont sécantes. En appliquant le théorème précédent, on a une contradiction : δ_0 et δ_1 seraient à la fois parallèles et sécantes.

55.5 Corollaires

- Deux droites parallèles à une même troisième ayant un point commun sont superposées (ex. 1)
- Si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre (ex. 2).
- Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles (transitivité) (ex. 3).

Ex. 1: $\forall\ \delta_0\ \delta_1\ \delta_2,\ \forall\ A,\ \left.\begin{array}{l} A \in \delta_1\ \wedge \\ A \in \delta_2\ \wedge \\ \delta_0 \parallel \delta_1\ \wedge \\ \delta_0 \parallel \delta_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_1 = \delta_2.$

Ex. 2: $\forall\ \delta_0\ \delta_1\ \delta_2,\ \delta_0 \parallel \delta_1\ \wedge\ \delta_0 \nparallel \delta_2\ \Rightarrow \delta_1 \nparallel \delta_2.$

Ex. 3: $\forall\ \delta_0\ \delta_1\ \delta_2,\ \delta_0 \parallel \delta_1\ \wedge\ \delta_1 \parallel \delta_2\ \Rightarrow \delta_0 \parallel \delta_2.$

Leçon 56

Droites parallèles et perpendiculaires

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `N5_ParallelAndPerpendicularLines.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.
On va terminer par les relations entre parallélisme et perpendicularité.

56.1 Lemme préliminaire

Si deux angles droits issus du même sommet ont un côté commun, les deux autres côtés définissent la même droite.

Enoncé :

$$\forall\ A\ B\ C\ D,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ D \neq B\ \wedge \\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{V}\ \wedge \\ \widehat{CBD} \equiv \widehat{V} \end{array}\right\} \Rightarrow (AB) = (DB).$$

Démonstration : On montre que A et B sont colinéaires à C et D. Selon l'orientation des triplets (A, B, C) et (C, B, D), soit le point B est entre A et D car les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBD}$ sont suppléments, soit les points A et D sont du même côté par rapport à A car les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CBD}$ sont congrus.

56.2 Théorème

Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

Enoncé :

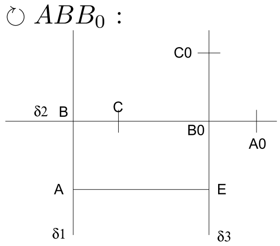
$$\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3,\ \left.\begin{array}{l} \delta_1 \perp \delta_2\ \wedge \\ \delta_2 \perp \delta_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \delta_1 \parallel \delta_3.$$

Démonstration :

- Par définition, si $\delta_1 \perp \delta_2$, il existe trois points A, B et C sommets d'un angle droit avec $A \in \delta_1$, $B \in \delta_1$, $B \in \delta_2$ et $C \in \delta_2$, de même l'hypothèse $\delta_2 \perp \delta_3$ fournit trois points A_0, B_0 et C_0 vérifiant des hypothèses équivalentes.

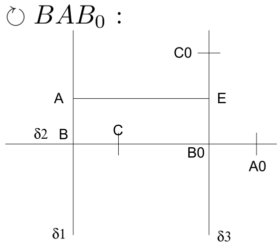
- On raisonne par cas sur la position des trois points A, B et B_0 :

  – $\circlearrowright ABB_0$:

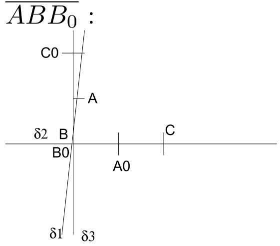
  Soit E le quatrième sommet du parallélogramme strict ABB_0E. L'angle $\widehat{ABB_0}$ est droit (th. de la leçon 50), l'angle $\widehat{BB_0E}$ qui est supplément de $\widehat{ABB_0}$ (ex. 22, leçon 45) est droit. Les droites (AB) et (EB_0) sont parallèles (ex. 6, leçon 48), or $(AB) = \delta_1$ et $(EB_0) = (C_0B_0) = \delta_3$ (lemme préliminaire) d'où $\delta_1 \parallel \delta_3$.

  – $\circlearrowright BAB_0$:

  Soit E le quatrième sommet du parallélogramme strict B_0BAE. Le raisonnement est le même : l'angle $\widehat{BB_0E}$ qui est supplément de l'angle droit $\widehat{ABB_0}$ est droit. Les droites $(AB) = \delta_1$ et $(EB_0) = \delta_3$ sont parallèles.

  – $\overline{ABB_0}$:

  Par conséquent, le point B_0 est sur δ_1, les droites δ_1 et δ_2 sont sécantes et donc $B_0 = B$. L'angle $\widehat{CBC_0}$ est droit (th. de la leçon 50), les droites (C_0B) et (AB) sont superposées (lemme préliminaire), et comme $(AB) = \delta_1$ et $(C_0B) = \delta_3$ il vient $\delta_1 \parallel \delta_3$.

56.3 Conséquences

- Deux droites perpendiculaires à une même troisième ayant un point commun sont superposées (ex. 1)
- Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre (ex. 2).
- Deux droites perpendiculaires à deux droites sécantes sont sécantes (ex. 3).
- Deux droites parallèles à deux droites sécantes sont sécantes (ex. 4).

Ex. 1: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3,\ \forall\ A,\ \left.\begin{array}{l}\delta_1 \perp \delta_3 \wedge \\ \delta_2 \perp \delta_3 \wedge \\ A \in \delta_1 \wedge \\ A \in \delta_2\end{array}\right\} \Rightarrow \delta_1 = \delta_2.$

Ex. 2: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3,\ \delta_1 \perp \delta_2\ \wedge\ \delta_1 \parallel \delta_3\ \Rightarrow \delta_2 \perp \delta_3.$

Ex. 3: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4,\ \delta_1 \nparallel \delta_2\ \wedge\ \delta_1 \perp \delta_3\ \wedge\ \delta_2 \perp \delta_4\ \Rightarrow \delta_3 \nparallel \delta_4.$

Ex. 4: $\forall\ \delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4,\ \delta_1 \nparallel \delta_2\ \wedge\ \delta_1 \parallel \delta_3\ \wedge\ \delta_2 \parallel \delta_4\ \Rightarrow \delta_3 \nparallel \delta_4.$

Conclusion

Pouquoi s'arrêter ici? Arrêter l'exposé de fondements comporte toujours une part d'arbitraire.

Paradoxalement, nous allons chercher notre justification dans la géométrie de Hilbert. Nous savons que les axiomes de Hilbert permettent de définir une géométrie plane (et aussi une géométrie dans l'espace, mais qui est hors de notre propos ici). Cette géométrie est définie en logique classique (elle utilise le tiers exclu), elle est abstraite en ce sens qu'elle ne fait pas appel pour sa fondation à la construction de figures, elle admet $\mathbf{R^2}$ comme modèle.

Avec l'introduction des notions de distance et d'angle, puis en étudiant les positions respectives de deux droites jusqu'à montrer l'unicité de la parallèle à une droite passant par un point, nous nous sommes donné les moyens de démontrer tous les énoncés des axiomes de la géométrie plane de Hilbert à l'exception bien entendu de celui de la complétude de la droite réelle (Dedekind ou Cantor). C'est l'objet du développement proposé dans l'annexe 2. Dans les fichiers *Coq* correspondants, tout le travail s'effectue dans le monde des propositions (*Prop*), et un petit nombre d'adaptations sont nécessaires comme par exemple de remplacer l'égalité sur les droites par la superposition.

Il est de ce fait correct d'envisager l'établissement de toute une géométrie plane sur la base des fondements développés ici. Bien sûr, il ne peut s'agir du plan de Hilbert, mais du plan des points constructifs à la règle et au compas. La droite n'est pas complète mais il y a une injection de l'extension de $\mathbf{Q}$ aux racines carrés sur la droite (ou de l'extension de $\mathbf{Q}^+$ aux racines carrés sur l'ensemble des distances). Par contre, elle contient l'orientation dès le départ et utilise la règle et le compas comme constructeurs.

Il s'agit là d'une vision moderne de la géométrie d'Euclide, n'ayons pas peur des mots, dans l'éclairage apportée par l'isomorphisme de Curry-Howard. Cet isomorphisme se situe entre les preuves en logique intuitionniste et les programmes. Il exprime le fait que l'on peut extraire d'une démonstration le programme calculant la solution. De même, de nos démonstrations nous pouvons extraire la construction à la règle et au compas. Un exemple est développé dans l'annexe 3 avec le théorème de Bolyai. Cet orientation apporte son lot de contraintes, ainsi nous n'avons pas défini le milieu d'un segment lorsque ses extrémités sont confondues, car la construction du milieu faisait appel à la médiatrice qui exige que les extrémités du segment soient distinctes.

Ce travail ne demande qu'à être poursuivi. Personnellement, je vois trois pistes de développements que je détaille ci-dessous, mais cela n'exclue nullement d'autres développements.

Développer cette géométrie plane Seulement une petite partie de la géométrie plane a été développée. Il reste donc beaucoup à écrire. En se limitant à la géométrie usuelle, on peut distinguer trois axes. Pour faciliter ce travail, on pourra s'aider des tactiques définies dans l'annexe 1, les enrichir et parfois les corriger. On pourra également s'inspirer des développements déjà écrits surtout lorsqu'il s'agit de définir des notions ou de nouvelles constructions.

Enrichir l'existant C'est probablement le plus facile.

On peut imaginer de définir les bissectrices d'un angle et leurs propriétés.

On peut aussi s'intéresser aux triangles, ajouter les triangles rectangles, s'intéresser aux droites particulières du triangle (médiatrices, bissectrices, médianes et hauteurs) ainsi qu'aux points particuliers (barycentre, centre du cercle inscrit, centre du cercle circonscrit) etc.

On peut s'intéresser aux quadrilatères, outre les parallélogrammes déjà définis, définir les rectangles, losanges et carrés et montrer leurs propriétés.

Le rapport des longueurs Définir le rapport de deux longueurs qui est un nombre sans dimension, n'est pas immédiat. Il faudra faire un choix entre donner une matérialité à ce nombre en lui associant par exemple un point de la demi-droite $[OU)$ ou rester dans l'immatériel, par exemple en définissant la relation entre quatre longueurs d'être de même rapport.

Une fois ce choix effectué, le développement logique est le théorème de Thalès et ses conséquences.

Les aires Là aussi plusieurs choix de départ sont possibles.

Il est possible de matérialiser le produit de deux longueurs par un point de $[OU)$. Puis on prolonge par les calculs d'aires.

Il est également possible de matérialiser l'aire par un carré canonique (par exemple ayant O comme un de ses sommets et deux autres sommets l'un sur $[OU)$, l'autre sur $[OV)$. On poursuit par la quadrature du rectangle, puis du triangle.

D'autres choix sont certainement imaginables. Ce développement devra conduire à une définition sous une forme ou sous une autre de la racine carrée, puis s'achever par l'établissement du théorème de Pythagore.

Un outil pédagogique Il y a quelques années déjà que les logiciels de géométrie dynamique comme *Cabri-géomètre* ou *GeoGebra* entre autres, ont fait leur place dans l'enseignement secondaire. Mieux que la figure papier, ils offrent une réalisation rigoureuse du dessin qui permet de visualiser ce qui est fixe et ce qui est mobile et d'éviter des croyances dues à de simples cas particuliers. Malheureusement, cette médaille a son revers.

Pour nombre d'élèves, la force de conviction apportée par cette visualisation apparait supérieure à celle d'une démonstration qui fait figure d'exigence inutile et compliquée. C'est d'autant plus regrettable que la géométrie plane avait montré dans les siècles passés son aptitude à fournir un excellent support pour l'apprentissage du raisonnement.

Un moyen pour concilier les deux serait d'associer dans un même environnement, logiciel de géométrie dynamique et assistant de preuves. Il y a quelques années, lors de son stage pendant ses années d'études, Vincent Laporte avait construit un prototype d'interface entre *Geogebra* et la version primitive de le géométrie d'Euclide en *Coq* que j'avais écrite. Malgré des difficultés système à faire coopérer tout ce petit monde, son travail m'avait convaincu de l'intérêt d'un tel développement.

C'est pourquoi j'ai été amené à écrire de nombreuses tactiques permettant de rapprocher l'écriture de scripts *Coq* de l'écriture de raisonnement en français. Malheureusement, le langage de tactique de *Coq*, *LTac* n'offre pas les mêmes garanties de correction que *Coq* et les tactiques présentées dans l'annexe 1 comportent encore des erreurs. (Ces erreurs ne peuvent conduire à des démonstrations erronnées mais font que les tactiques ne fournissent pas le service attendu).

La démonstration du théorème de Bolyai dans l'annexe 3 illustre ce à quoi ressemblerait un tel outil. La piste est ouverte, il ne reste plus qu'à la tracer.

Un départ encore plus constructif ? Comme j'ai déjà eu l'occasion de le dire, le point de départ ne me satisfait pas complètement. Dans une vision complètement constructiviste, on ne devrait pas avoir besoin d'axiomes pour construire cette géométrie.

Une vision idéale voudrait que les points, les droites et les cercles soient construit de manière mutuellement inductive à partir des points de départ O et U, l'orientation et la métrique étant elles-mêmes définies inductivement. Malheureusement, plusieurs obstacles se dressent face à la réalisation d'un tel objectif. Le premier est l'impossibilité de réunir dans une même structure mutuellement inductive des prédicats dans *Prop* et des constructions dans *Set*. Le deuxième est l'égalité de Liebniz utilisée dans *Coq* qui distingue deux objets ayant des constructions différentes (par exemple les droites (AB) et (BA)). Or construire les points par les trois types d'intersections choisies (intersection de droites sécantes, de cercles sécants ou d'un cercle et un de ses diamètres) font que plusieurs constructions différentes définissent le même point. La démonstration d'égalité de points se faisant par le fait qu'ils vérifient tous deux les propriétés caractéristiques d'une de ces intersections.

C'est pourquoi j'ai été amené à composer. Les définitions de l'orientation et de la métrique font appel à des axiomes. L'ensemble des points n'est pas construit mais préexistant. Seules les intersections sont construites et par un axiome sont plongées dans l'ensemble des points. De ce fait l'égalité des points est bien l'égalité de Liebniz, mais comme un point unique est associé à chaque intersection, il devient possible de démontrer l'égalité de points obtenus par des constructions différentes. Par contre, je n'ai pas retenu ce type de construction pour les droites et c'est l'égalité de droites qui a été remplacée par une relation d'équivalence, la superposition.

Toutefois, je reste persuadé qu'il est possible de faire mieux. Ce travail ne sera pas alors inutile pour autant car il concentre dans le livre 1 les points de départ. Toute construction plus intelligente que la mienne et qui permettra de retrouver toutes les notions et axiomes du livre 1 aura donc la certitude de pouvoir construire toute la géométrie plane développée par la suite.

Livre 15 : Annexe 1 : Tactiques

A propos de ce tome : Comme nous l'avions mentionné dès le début, l'écriture puis l'utilisation de tactiques permet d'automatiser la résolution de buts simples et d'engranger au fur et à mesure les connaissances acquises pour en faciliter leur usage. A celà s'ajoute le désir de créer un outil permettant la rédaction de preuves dans une langue vernaculaire comme nous l'avons envisagé dans la conclusion.

Dans les fichiers *Coq*, à la fin de chaque tome, on trouve un fichier de tactiques. Celà a permis d'écrire plus aisément les preuves des tomes suivants et de tester les tactiques. En effet, il n'y a pas de certification de la correction des tactiques et la méthode la plus efficace de tester leur validité est encore de les utiliser. Comme nous l'avons déjà dit, il reste nécessairement des erreurs dans ces fichiers.

Cependant, nous n'avons pas cru bon de détailler ces fichiers de tactiques au fur et à mesure de leur apparition pour plusieurs raisons. La première est que nous souhaitions que ce livre de fondements de géométrie plane puisse être lu et utilisé sans référence au logiciel *Coq*. La seconde est que l'utilisation de ces tactiques est interne à la contribution compilée et peut être complètement ignorée de l'utilisateur. La troisième est que ces fichiers ont servi en quelque sorte de brouillon pour les fichiers de tactiques proposés maintenant.

Les fichiers proposés maintenant sont en dehors de la contribution compilée. En effet, il nous semble souhaitable qu'ils puissent être augmentés, corrigés et amendés par les utilisateurs au fur et à mesure de leur travail. Chaque tactique est présentée de la manière suivante : son identificateur suivi de sa liste de paramètre, puis en italique le texte français qui pourrait être utilisé dans une interface pour se substituer à l'appel de la tactique, puis des commentaires éventuels. Plusieurs tactiques n'ont à priori pas de raison d'être connues et utilisées par quelqu'un qui rédigerait une preuve en langue vernaculaire, le texte français mentione alors *tactique interne*.

Les tactiques du logiciel *Coq* n'ont pas un comportement constant face à l'impossibilité d'être appliquée, certaines échouent, prévenant ainsi l'utilisateur, d'autres laissent le but inchangé en rattrapant l'exception ce qui permet un usage plus générique (il en va ainsi par exemple de la tactique *intros* qui réalisent toutes les introductions possibles même si leur nombre est zéro). Pour nos tactiques, nous avons fait un choix différent : toutes nos tactiques échouent avec un message d'erreur si elles ne parviennent pas à modifier le but dans l'optique désirée. La raison en est l'objectif de la réalisation d'un outil didactique où il est bon que l'utilisateur sache que ce qu'il désire faire n'est pas effectué. Il reste bien sûr toujours possible de précéder la tactique par le mot *try* qui dans le langage de tactique *Ltac* permet de rattraper une exception et donc de ne rien faire en cas d'échec.

Leçon 57

La tactique *immediate*

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `T1_Immediate.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

A priori ce chapitre ne devrait contenir qu'une seule tactique. La tactique *immediate* a pour objet d'effacer un but lorsqu'il se déduit directement d'une définition ou d'une propriété élémentaire. En fait, cette tactique se décompose en de nombreuses sous tactiques selon le but à effacer. Toutefois, ces sous tactiques pourront être ignorées par un utilisateur.

En fait, nous avons besoin de tactiques n'ayant pas leur place dans ce chapitre mais qui seront mentionnées plus tard, elles seront donc présentées ici au début. Puis, nous présenterons les sous tactiques dépendantes du but pour terminer par la tactique *immediate.*

57.1 Tactiques préliminaires

57.1.1 contrapose H

Enoncé : *Par contraposition avec l'hypothèse H.*

Commentaire : Il s'agit de remplacer $H : \neg A \Rightarrow \neg B$ par $H : B \Rightarrow A$.

57.1.2 simplLine

Enoncé : *Par simplification en utilisant les définitions relatives à la droite.*

57.1.3 simplCircle

Enoncé : *Par simplification en utilisant les définitions relatives au cercle.*

57.1.4 simplCircleHyp H

Enoncé : *Par simplification de l'hypothèse H en utilisant les définitions relatives au cercle.*

57.1.5 canonize

Enoncé : *Par simplification en utilisant les définitions relatives à l'orientation.*

57.1.6 simplGoal

Enoncé : *Par simplification du but en utilisant les définitions relatives à l'orientation.*

57.1.7 splitIsAngle

Enoncé : *tactique interne.*

Commentaire : Il s'agit d'ajouter à tout angle de l'environnement $H : IsAngle\ \alpha$ sa définition comme point du demi-cercle unité : $\alpha \in (O, OU)$ et $\not\circlearrowright U\alpha O$.

57.2 Résolution d'égalité de distance

Du fait des possibilités de calcul, les distances font l'objet d'un traitement spécifique. L'idée est de nommer toutes les distances (ce qui unifie les distances AB et BA) puis de les mettre sous une forme canonique pour gérer la commutativité et l'associativité de l'addition.

Toutes ces tactiques, à l'exception de la dernière, sont internes :

Enoncé : *tactique interne.*

57.2.1 simplDistance

Commentaire : Il s'agit de simplifier :

- AA en O,
- OU, OU', OV en U,
- avec la définition de supplementaire,
- avec la définition de distance,
- $O + d$ en d,
- $(n + 1) * d$ en $nd + d$, $1 * d$ en d, $0 * d$ en O,
- la distance d'un point d'un cercle au centre en le rayon,
- avec la définition des constructions de points.

57.2.2 generalizeMid

Commentaire : Ajoute comme prémisse du but l'égalité de distance entre un point de la médiatrice de $]A, B[$ et A et B eux-mêmes.

57.2.3 destructSP H

Commentaire : Ajoute à l'hypothèse $H : \sharp^{\circlearrowright} ABCD$ les hypothèses $\sharp ABCD$ et $\circlearrowright ABC$.

57.2.4 generalizeDistParallelogramm

Commentaire : Efface toute hypothèse de parallélogramme et ajoute comme prémisses du but le parallélogramme et les égalités de côtés.

57.2.5 generalizeDistTCongruent

Commentaire : Efface toute hypothèse de congruence entre deux triangles et ajoute comme prémisse du but la congruence entre triangles et les égalités des côtés respectifs.

57.2.6 generalizeDistIsoceles

Commentaire : Efface à toute hypothèse de triangle isocèle ou équilatéral et ajoute comme prémisse du but le triangle isocèle ou équilatéral et les égalités de côtés.

57.2.7 generalizeDist

Commentaire : Efface toute hypothèse contenant une distance et l'ajoute comme prémisse du but.

57.2.8 foldDistance

Commentaire : Remplace dans le but toutes les occurrences des distances AB et BA par un identificateur frais δ et ajoute dans les hypothèses $\delta = AB$.

57.2.9 substDistance

Commentaire : Introduit les prémisses une à une. Lorsque celle-ci est une égalité $X = Y$ dans laquelle X (ou Y) est une distance, elle substitue respectivement X (Y) par Y (X).

57.2.10 unfactorizeDistance delta

Commentaire : Met les termes *delta* en tête dans les sommes de distances.

57.2.11 unfoldDistance

Commentaire : Pour chaque distance en hypothèse $\delta = AB$, met cette distance en tête dans les sommes puis la remplace par AB et l'efface des hypothèses.

57.2.12 headDistancePlus B X

Commentaire : Met le terme B en tête dans le terme X.

57.2.13 writeDistancePlus A B sigma

Commentaire : Remplace toutes les occurrences de $A+B$ par σ même lorsque A et B sont séparés par d'autres termes dans la somme.

57.2.14 foldDistancePlusRec A B

Commentaire : Remplace récursivement sur le deuxième terme une somme de deux termes dans le but par un identificateur frais.

57.2.15 foldDistancePlus

Commentaire : Remplace toute somme de deux termes par un identificateur frais dans le but en tenant compte de la commutativité et de l'associativité.

57.2.16 unfoldDistancePlus

Commentaire : Pour chaque hypothèse de type $\delta = AB$, $\sigma = \alpha+\beta$, $\tau = n*\alpha$, remplace toutes les occurrences de δ, σ ou τ respectivement par son second terme et l'efface des hypothèses.

57.2.17 substDistancePlus

Commentaires : Introduit les prémisses une à une. Lorsque celle-ci est une égalite dont l'un des membres est une somme, substitue toutes les occurrences de cette somme par le second membre dans le but.

57.2.18 solveEqBase

Commentaire : Résoud toute égalité de type $X = X$ ou $X = Y$ avec dans les hypothèses $X = Y$ ou $Y = X$.

57.2.19 solveDistPlus

Commentaire : Essaie de résoudre une égalité dont l'un au moins des membres est une somme après avoir ajouté toutes les égalités de distances découlant des hypothèses comme prémisses, avoir mis sous forme canonique et simplifié au mieux les égalités.

57.2.20 foldDistanceTimes

Commentaire : Remplace $n * AB$ et $n * BA$ par un identificateur frais.

57.2.21 unfoldDistanceTimes

Commentaire : Pour chaque hypothèse de type $\tau = n*\alpha$, remplace toutes les occurrences de τ respectivement par son second terme et l'efface des hypothèses.

57.2.22 substDistanceTimes

Commentaire : Introduit les prémisses une à une. Lorsque celle-ci est une égalite dont l'un des membres est le produit d'une distance par un entier, substitue toutes les occurrences de ce produit par le second membre dans le but.

57.2.23 solveDistTimes

Commentaire : Essaie de résoudre une égalité dont l'un au moins des membres est le produit d'une distance par un entier après avoir ajouté toutes les égalités de distances découlant des hypothèses comme prémisses, avoir mis sous forme canonique et simplifié au mieux les égalités.

57.2.24 solveOnCircleDist

Commentaire : Résoud les égalités de distance entre un point sur un cercle et le centre du cercle d'une part, le rayon du cercle d'autre part.

57.2.25 solveDist

Commentaire : Essaie de résoudre une égalité dont l'un au moins des membres est une distance après avoir ajouté toutes les égalités de distances découlant des hypothèses comme prémisses, avoir mis sous forme canonique et simplifié au mieux les égalités.

57.2.26 solveDistance

Enoncé : *Par calcul sur les distances.*

Commentaire : Résoudre une égalité lorsque :

- elle est triviale,
- elle a un membre somme de deux distances et est résolue par solveDistPlus,
- elle a un membre produit d'un entier par une distance et est résolue par solveDistTimes,
- elle a un membre qui est une distance et est résolue par solveDist.

Cette tactique ne résoud pas tous les cas mais les cas simples, pour des résolutions plus complexes, l'utilisateur ne s'étonnera pas de devoir aider le logiciel par une ou plusieurs étapes intermédiaire.

57.3 Effacement de prédicats

Ces sous tactiques sont appelées lorsque le but est un prédicat, le filtrage s'effectuant sur l'identificateur du prédicat. Toutes ces tactiques sont internes :

Enoncé : *tactique interne.*

57.3.1 immOnCircle

Commentaire : Cas simples d'un point sur un cercle.

57.3.2 immClockwise

Commentaire : Effacement d'un prédicat dextrogyre :

- dans les cas simples,
- si l'un des points est sur une médiatrice,
- si ce sont des points d'un parallélogramme strict.

57.3.3 immCollinearBase

Commentaire : Effacement d'un prédicat de colinéarité :

- dans les cas simples,
- par définition de distance, somme de distances, produit d'une distance par un entier,
- avec une hypothèse de colinéarité, de même orientation, de demi-droites ouvertes ou fermées, de relation entre, de segment, de même direction, de relation archimédienne, d'appartenance à une droite,
- de rappel récursif après avoir utilisé la définition de l'un des points.

57.3.4 immCollinear

Commentaire : Effacement d'un prédicat de colinéarité :

- par l'utilisation de la tactique précédente,
- avec une hypothèse d'angle nul ou plat,
- lorsque l'un des points est intersection de deux droites sécantes,
- lorsque l'un des points est intersection d'un cercle et d'un diamètre (on ajoute les relations de même orientation qui en découle et l'on appelle la tactique précédente),
- lorsque un des points a été construit (même méthode).

57.3.5 immNotClockwise

Commentaire : Effacement de la négation d'un prédicat dextrogyre :

- dans les cas simples,
- avec une hypothèse de colinéarité.

57.3.6 immOnLine

Commentaire : Cas simples d'appartenance d'un point à une droite.

57.3.7 immDistinct

Commentaire : Effacement d'un inégalité :

- dans les cas simples,
- avec une hypothèse d'orientation, de non colinéarité, de relation entre,
- avec une hypothèse de distance (en particulier de distance non nulle), avec une relation d'ordre sur les distances,
- avec une hypothèse de congruence d'angles, d'angle nul plat ou droit,
- avec une hypothèse de triangle strict,
- avec une hypothèse d'angles supplément, opposés,
- avec une hypothèse de parallélogramme strict, de parallélogramme.

57.3.8 immEquiorientedBase

Commentaire : Effacement d'un prédicat de même orientation de bipoint :

- dans les cas simples,
- avec une hypothèse de même orientation, de demi-droite, de relation entre, de relation archimédienne.

57.3.9 immEquiOriented

Commentaire : Effacement d'un prédicat de même orientation de bipoint :

- dans les précédents,
- lorsqu'un des points est obtenu par construction, on ajoute la propriété d'orientation qui découle de cette construction et on appelle la tactique précédente pour éviter de boucler.

57.3.10 immOpenRayBase

Commentaire : Appartenance à une demi-droite ouverte :

- dans les cas simples,
- avec une hypothèse de demi-droite fermée, de relation entre, de segment,
- avec une hypothèse d'ordre de distance, de relation archimèdienne.

57.3.11 immOpenRay

Commentaire : Appartenance à une demi-droite ouverte :

- dans les cas précédents,
- lorsqu'un des points est obtenu par construction, on ajoute la propriété d'orientation qui découle de cette construction et on appelle la tactique précédente pour éviter de boucler.

57.3.12 immClosedRay

Commentaire : Appartenance à une demi-droite fermée par utilisation de la tactique précédente.

57.3.13 immIsDistance d

Commentaire : Prouve que point d est une distance (un point de $[OU)$).

57.3.14 immBetween

Commentaire : Effacement d'une relation entre :

- dans les cas simples,
- quand l'un des points est un point construit,
- par une hypothèse d'angle plat, d'angles opposés.

57.3.15 immSegment

Commentaire : Appartenance à un segment : dans les cas simples ou si l'un des points est obtenu par une construction.

57.3.16 solveEq

Commentaire : L'objectif de cette tactique est de résoudre une égalité entre points dont l'un a été obtenu par construction. On fait appel au lemme d'unicité relatif à cette construction et l'on tente de prouver que l'autre point satisfait les prédicats requis. Pour ce faire on utilise les tactiques précédentes. L'échec de cette tactique prouve uniquement que au moins l'un de ces prédicats demande un peu de travail et ne peut être prouvé immédiatement.

57.3.17 OrderAngle A B C D E F

Commentaire : Cette tactique très interne a pour seul objet de réécrire les sommets d'une égalité d'angles dans l'ordre énoncé par l'appel.

57.3.18 immRightAngle

Commentaire : Montrons qu'un angle est droit :

- dans les cas simples,
- avec une hypothèse d'angle droit,
- avec une hypothèse d'angle supplément,
- lorsqu'un sommet appartient à une médiatrice.

57.3.19 immCongruentAngle

Commentaire : Montrons que deux angles sont congruents :

- dans les cas simples,
- avec une hypothèse d'angle droit,
- avec une hypothèse de demi-droite (côté commun aux deux angles),
- avec une hypothèse de triangles congruents,
- avec une hypothèse de triangle isocèle, équilatéral,
- avec une hypothèse d'angles opposés,
- avec une hypothèse de parallélogramme, de parallélogramme strict.

57.3.20 immSupplement

Commentaire : Montrons que deux angles sont suppléments :

- dans les cas simples,
- avec une hypothèse d'angle supplément,
- avec une hypothèse d'angle droit,
- avec une hypothèse de relation entre,
- avec une hypothèse de parallélogramme, de parallélogramme strict.

57.3.21 EqToCongruent

Commentaire : Remplace des relations d'égalités entre angles par des relations de congruence en s'abstrayant des relations d'inégalité entre points nécessaires aux définitions d'angles.

57.3.22 immNullAngle

Commentaire : Cas simples de preuves d'angle nul.

57.3.23 immElongatedAngle

Commentaire : Cas simples de preuves d'angle plat.

57.3.24 immIsAngle

Commentaire : Cas simples de preuves qu'un point est un angle (qu'il appartient au demi-cercle unité).

57.3.25 solveAngle

Commentaire : Cas simples de preuves d'égalité d'angles.

57.3.26 solveSupplementary

Commentaire : Cas simples de preuves qu'un angle est le supplémentaire d'un autre.

57.3.27 immNotNullAngle

Commentaire : Cas simples de preuves qu'un angle n'est pas nul.

57.3.28 immNotElongatedAngle

Commentaire : Cas simples de preuves qu'un angle n'est pas plat.

57.3.29 immNotRightAngle

Commentaire : Cas simples de preuves qu'un angle n'est pas droit.

57.3.30 immNotCollinear

Commentaire : Cas simples de preuves que trois points ne sont pas alignés.

57.3.31 immEquiDirected

Commentaire : Cas simples de preuves de même direction y compris les côtés opposés d'un parallélogramme.

57.3.32 immNotEquiDirected

Commentaire : Cas simples de preuves que deux paires de points n'ont pas la même direction.

57.3.33 immDistanceLe

Commentaire : Montrons qu'une distance est inférieure ou égale à une autre:

- dans les cas simples,
- avec des sommes de distances,
- avec une hypothèse de segment, de relation entre, de même orientation.

57.3.34 immDistanceLt

Commentaire : Montrons qu'une distance est strictement inférieure à une autre :

- dans les cas simples,
- avec une de relation entre.

57.3.35 immTriangularInequality

Commentaire : Cas simples de preuves d'inégalité triangulaire.

57.3.36 immTriangleSpec

Commentaire : Cas simples de vérification de la spécification du triangle (rappel : pour l'intersection de cercles).

57.3.37 immDiameter

Commentaire : Cas simples de preuves qu'une droite est diamètre d'un cercle.

57.3.38 immTStrict

Commentaire : Cas simples de preuves qu'un triangle est strict.

57.3.39 immIsoceles1

Commentaire : Montrons qu'un triangle ABC est isocèle en A :

- avec une hypothèse de triangle isoccèle,
- avec une hypothèse d'égalité de distance,
- avec une hypothèse de congruence d'angles.

57.3.40 immIsoceles2

Commentaire : Montrons qu'un triangle ABC est isocèle en B (mêmes cas).

57.3.41 immIsoceles3

Commentaire : Montrons qu'un triangle ABC est isocèle en C (mêmes cas).

57.3.42 immEquilateralBase

Commentaire : Montrons qu'un triangle ABC est équilatéral :

- avec une hypothèse de triangle équilatéral,
- en montrant qu'il est isocèle en deux sommets.

57.3.43 immEquilateral

Commentaire : Montrons qu'un triangle ABC est équilatéral soit avec la tactique précedente, soit en détectant une médiatrice, en ajoutant les relations d'égalité de distance induites aux hypothèses et en appliquant la tactique précédente pour éviter de boucler.

57.3.44 usingSSS

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents s'ils ont leurs côtés respectivement égaux. Cette tactique et les suivantes dont l'identificateur commencent par using sont des tactiques très internes, elles n'échouent pas et créent les sous buts correspondants aux égalités. Elles seront utilisées à la fois par les tactiques immediate et step.

57.3.45 usingSASb

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents car leurs deuxièmes sommets respectifs ont des angles congruents et des côtés adjascents égaux.

57.3.46 usingSASa

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents car leurs premiers sommets respectifs ont des angles congruents et des côtés adjascents égaux.

57.3.47 usingSASc

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents car leurs troisièmes sommets respectifs ont des angles congruents et des côtés adjascents égaux.

57.3.48 usingASAca

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents car leurs troisièmes côtés respectifs sont de longueurs égales et ont des angles adjascents congruents.

57.3.49 usingASAbc

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents car leurs deuxièmes côtés respectifs sont de longueurs égales et ont des angles adjascents congruents.

57.3.50 usingASAab

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents car leurs premiers côtés respectifs sont de longueurs égales et ont des angles adjascents congruents.

57.3.51 immTCongruentBase

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents en utilisant une hypothèse de congruence de deux triangles.

57.3.52 immTCongruent

Commentaire : Montrons que deux triangles sont congruents :

- en utilisant la tactique précédente,
- en utilisant une médiatrice, on rajoute aux hypothèses les congruences de triangles qui en découlent puis on appelle la tactique précédente
- en uilisant le centre d'un parallèlogramme de la même manière, ou le centre d'un parallélogramme strict,
- en utilisant une hypothèse de parallélogramme ou une hypothèse de parallélogrammme strict et la même technique,
- en essayant les tactiques usingSSS, usingSAS... et usingASA... et résolvant les égalités de distances et les congruences d'angles.

57.3.53 immParallelogramm

Commentaire : Montrons que quatre points forment un parallélogramme :

- dans les cas simples,
- en utilisant une hypothèse de parallélogramme, parallélogrammme strict,
- en utilisant une égalité de milieu.

57.3.54 immStrictParallelogramm

Commentaire : Montrons que quatre points forment un parallélogramme strict :

- dans les cas simples,
- en utilisant une hypothèse de relation dextrogyre,
- en utilisant la construction du quatrième sommet.

57.3.55 immEqLine

Commentaire : Cas simples où deux droites sont superposées.

57.3.56 immParallelLines

Commentaire : Cas simples où deux droites sont parallèles.

57.3.57 immSecantLines

Commentaire : Cas simples où deux droites sont sécantes.

57.3.58 immNotEqLine

Commentaire : Cas simples où deux droites ne sont pas superposées.

57.3.59 immNotSecantLines

Commentaire : Cas simples où deux droites ne sont pas sécantes.

57.3.60 immPerpendicular

Commentaire : Cas simples où deux droites sont perpendiculaires (y compris le cas de la médiatrice).

57.4 La tactique immediate

57.4.1 Nom : immediate

Enoncé : *Par hypothèses*

Commentaire : Cette tactique a pour effet d'effacer le but sans en créer de nouveaux lorsqu'elle réussit.

Elle procède par filtrage sur l'opérateur de tête du but à résoudre :

- les cas triviaux sont : le but est `True`, il existe une hypothèse `False`, il existe une hypothèse égale au but,
- c'est une conjonction de deux buts, il faut les effacer tous les deux,
- c'est une disjonction, on essaie d'effacer le premier, en cas d'échec d'effacer le second,
- c'est une égalité, sont traités dans l'ordre les cas suivants en appellant la sous tactique correspondante:
  - l'un des membres est une somme de distance,
  - l'un des membres est un produit de distance par un entier,
  - l'un des membres est une distance,
  - l'un des membres est un angle,
  - autre cas,
- c'est un prédicat, on appelle la sous tactique correspondante à l'identificateur de la relation.

Leçon 58

La tactique *step*

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `T2_step.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

La tactique *step* est la seconde tactique générique avec *immediate*. Elle a pour objet d'avancer dans la résolution du but courant en utilisant un lemme démontré dans les chapitres précédents.

58.1 Un exemple

Soit le but suivant à démontrer à l'aide de l'hypothèse Hyp :

$$Hyp : \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABD}$$

$$But : D \in]BC)$$

Dans une démonstration papier, on dirait que si ABC et ABD ont même orientation, comme les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$ sont égaux, les points C et D sont sur la même demi-droite issue de B. Reste à étudier les orientations.

Dans un script *Coq*, on écrira *apply (EqAngleOpenRay2 B A C D Hyp)*. On voit le fossé à franchir pour l'interface.

Il n'est pas raisonnable de demander à l'utilisateur de connaître le nom de tous les lemmes démontrés. Mais, il sera difficile de filtrer le texte de la démonstration papier (d'autant plus qu'il n'est pas unique!) pour retrouver le nom du lemme à appliquer. C'est pourquoi nous adoptons un compromis.

Il ne semble pas choquant de demander à l'utilisateur de repérer dans les hypothèses celle qu'il souhaite utiliser. C'est le rôle de la tactique *step* qui a un paramètre qui sera très souvent un identificateur de l'environnement, ici nous écrirons *step Hyp*.

La tactique *step* filtre (comme *immediate*) sur l'opérateur de tête du but, ici *OpenRay*. Il appelle alors une sous tactique, ici *stepOpenRay* avec les paramètres $B\ C\ D\ Hyp$, les trois premiers étant les paramètres d'*OpenRay*, le dernier le paramètre de *step*.

La sous tactique *stepOpenRay* filtre alors sur le type de l'hypothèse, ici *CongruentAngle A B C A B D*. Il propose alors la tactique suivante *apply (EqAngleOpenRay2 B A C D); try immediate*. Si la tactique *immediate* ne peut résoudre les deux sous buts d'orientation $\circlearrowright BAC$ et $\circlearrowright BAD$ générés, ceux-ci sont demandés à l'utilisateur.

On voit donc que, de même que pour *immediate*, un grand nombre de sous tactiques la plupart internes sont nécessaires au bon fonctionnement de *step*.

58.2 Modification d'égalité ou d'inégalité de distance

Pour les raisons déjà mentionnées pour la tactique *immediate*, les distances font l'objet d'un traitement spécifique. Toutes ces tactiques, à l'exception des trois dernières, sont internes.

58.2.1 foldDistanceIn H

Commentaire : Pour toute distance AB apparaissant dans H, elle remplace AB et BA par un identificateur frais dans H et dans le but.

58.2.2 foldDistanceTimesIn H

Commentaire : Même traitement pour tout produit $n * AB$.

58.2.3 writeDistancePlusIn A B sigma

Commentaire : Remplace dans le but toutes les occurrences de $A + B$ par σ modulo la commutativité et l'associativité.

58.2.4 foldDistancePlusRecIn H A B

Commentaire : Remplace récursivement dans H et dans le but, toute somme de distances $A + B$ apparaissant dans H par un identificateur frais.

58.2.5 foldDistancePlusIn H

Commentaire : Remplace récursivement dans H et dans le but, toute somme de distances apparaissant dans H par un identificateur frais.

58.2.6 substDistanceIn H

Commentaire : Réécrit H dans un sens ou dans l'autre dans le but.

58.2.7 unfoldDistanceIn H

Commentaire : Substitue tout identificateur δ égal à une distance AB apparaissant dans H par AB dans H et dans le but.

58.2.8 unfoldRec X

Commentaire : Déplie récursivement l'identificateur X égal à une somme de distances et substitue dans H et dans le but.

58.2.9 unfoldDistancePlusIn H

Commentaire : Déplie toute somme de distances apparaissant dans H et substitue l'identificateur par sa valeur dans H et dans le but.

58.2.10 stepEqDistance H

Enoncé : *Par réécriture, en utilisant H.*

Commentaire : Le but est une égalité de distances et selon la nature de H :

- H est une égalité : on remplace un terme de l'égalité H par l'autre,
- H est l'appartenance de C à la médiatrice de $[AB]$: on utilise l'égalité AC=BC,
- H est l'appartenance de C à un cercle de centre A et de rayon r : on utilise l'égalité AC=r,
- H stipule que le triangle est isocèle : on utilise l'égalité des côtés,
- H stipule que le triangle est équilatéral : on cherche quelle égalité de côtés peut être utilisée,
- H stipule que deux triangles sont congruents : on cherche quelle égalité de côtés peut être utilisée.

58.2.11 stepDistanceLe H

Enoncé : *En utilisant H.*

Commentaire : Le but est une inégalité large de distances et selon la nature de H :

- H est une égalité : on remplace un terme de l'égalité H par l'autre,
- H est une inégalité large : on utilise la transitivité,

58.2.12 stepDistanceLt H

Enoncé : *En utilisant H.*

Commentaire : Le but est une inégalité stricte de distances et H est une égalité : on remplace un terme de l'égalité H par l'autre,

58.3 Modification de prédicats

Ces sous tactiques sont appelées lorsque le but est un prédicat, le filtrage s'effectuant sur l'identificateur du prédicat. Toutes ces tactiques sont internes.

58.3.1 stepSupplement A B C D E F H

Commentaire : Selon le type de H :

- une assertion supplement : deux angles supplémentaires d'un même troisième sont égaux,
- une assertion de congruence d'angles : deux angles égaux sont supplémentaires d'un même troisième,
- une assertion d'angle nul : le supplémentaire de l'angle nul est l'angle plat,
- une assertion d'angle plat : le supplémentaire de l'angle plat est l'angle nul,
- une assertion d'angle droit : le supplémentaire d'un angle droit est droit,
- une assertion de parallélogramme : deux angles d'un parallélogramme ayant un côté commun sont supplémentaires.

58.3.2 stepOpposed A B C D E H

Commentaire : Le type de H doit être une relation d'orientation pour permettre de choisir le lemme à appliquer (ex 2 ou 3 de la leçon 36).

58.3.3 stepCongruentTransAngle A B C D E F H

Commentaire : L'égalité d'angles est transitive.

58.3.4 stepCongruentAngle A B C D E F H

Commentaire : Selon le type de H :

- une relation de demi-droite, de segment, entre, de même orientation : deux angles sont égaux s'ils ont les mêmes côtés,
- une relation de congruence d'angle : on appelle la tactique précédente,
- une assertion d'angle nul ou plat : deux angles nuls sont égaux, deux angles plats sont égaux,
- une assertion d'angles opposés : deux angles opposés sont égaux, on utilise la tactique précédente,
- une égalité de triangles : deux angles correspondants dans des triangles égaux sont égaux, on utilise la tactique précédente,
- une assertion de triangle isocèle : deux angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, on utilise la tactique précédente,

- une assertion de triangle équilatéral : deux angles d'un triangle équilatéral sont égaux, on utilise la tactique précédente,
- une assertion d'angles suppléments : deux angles supplémentaires d'un même troisième sont égaux,
- une assertion de parallélogramme : dans un parallélogramme, les angles opposés sont égaux, les angles extérieurs sont égaux, les angles alternes-internes sont égaux, on cherche une égalité qui corresponde au but, il restera alors des petites conditions à vérifier comme le fait que des points soient distincts,
- une égalité : on tente une réécriture dans un sens ou l'autre.

58.3.5 stepNullAngle A B C H

Commentaire : Selon le type de H :

- une relation $\neq$, une assertion de demi-droites : en utilisant la définition,
- une assertion d'angle nul, de congruence d'angles : un angle égal à un angle nul est nul,
- une assertion d'angle plat, d'angles suppléments : un angle supplémentaire d'un angle plat est nul.

58.3.6 stepElongatedAngle A B C H

Commentaire : Selon le type de H :

- une relation $\neq$, une assertion de segment : en utilisant la définition,
- une assertion de congruence d'angles : un angle égal à un angle plat est plat,
- une assertion d'angle nul, d'angles suppléments : un angle supplémentaire d'un angle nul est plat.

58.3.7 stepRightAngle A B C H

Commentaire : Si le sommet de l'angle est le point d'intersection de deux droites perpendiculaires alors on utilise le fait qu'un angle formé par deux droites perpendiculaires est droit, sinon on travaille selon le type de H :

- une assertion d'angle droit : un angle égal ou supplémentaire d'un angle droit est droit,
- une assertion de congruence d'angles : un angle égal à un angle droit est droit,
- une assertion d'angles suppléments : un angle supplémentaire d'un angle droit est droit,
- une assertion d'appartenance d'un point à une médiatrice : un angle à la base d'une médiatrice est droit,

- une assertion de perpendicularité de droites : un angle formé par deux droites perpendiculaires est droit.

58.3.8 byDefEqPoint

Commentaire : Cette tactique est semblable à *solveEq* du chapitre précédent, elle se propose de résoudre une égalité entre points en utilisant la définition d'un des points. A la différence de *solveEq*, elle ne demande pas d'effacer le but et n'échoue pas lorsqu'il reste des prémisses à prouver.

58.3.9 stepEq X Y H

Commentaire : Selon le type de H :

- H est un point :
  - définissant un angle supplémentaire sur le cercle unité, utilise la symétrie de la relation suplémentaire puis appelle *immediate*, (afin d'éviter de boucler, ce cas n'est pas rangé dans *immediate*)
  - égal aux deux membres de l'égalité, on appellera byDefEqPoint pour rèsoudre les deux égalités,
- une assertion d'appartenance à un cercle : c'est une égalité de distance,
- une assertion que deux cercles sont sécants : les deux points sont la même intersection des cercles,
- une assertion que deux droites sont sécantes, que deux paires de points n'ont pas la même direction : les deux points sont la même intersection de droites,
- une assertion qu'une droite est diamètre d'un cercle : les deux points sont la même intersection du cercle et de son diamètre,
- une assertion de non colinéarité, une relation dextrogyre : les deux points sont la même intersection de deux droites sécantes,
- une égalité de distance : la distance séparant les deux points est nulle,
- une égalité d'angles, une relation de congruence d'angles : les deux points définissent le même côté d'un angle,
- une assertion d'être un angle : les deux points sont le même angle,
- une égalité : par transitivité de l'égalité.

58.3.10 stepDistinct A B H

Commentaire : Selon le type de H :

- une relation $\neq$: par un choix de cas simples,
- une égalité de distances : si la distance séparant deux points est égale à celle séparant deux points distincts, les points sont distincts,

- une assertion d'appartenance à une demi-droite ouverte : un point d'une demi-droite ouverte non dégénérée est distinct de son extrémité,
- une relation dextrogyre : un point est dextrogyre avec deux autres points et l'autre non,
- une relation colinéaire : un point est colinéaire avec deux autres points et l'autre non,
- une relation non dextrogyre : un point n'est pas dextrogyre avec deux autres points mais l'autre l'est,
- une relation non colinéaire : un point n'est pas colinéaire avec deux autres points mais l'autre l'est,
- une égalité : par réécriture,
- H est une droite : un point est sur la droite et l'autre non.

58.3.11 stepCollinear H

Commentaire : Selon le type de H :

- H est une droite : les points sont sur la droite,
- une relation d'appartenance à une droite, une assertion de diamètre : en dépliant les définitions,
- une assertion de colinéarité : par transitivité,
- une assertion de congruence d'angles :les trois points définissent le même côté d'un angle,
- une égalité de points : par réécriture.

58.3.12 stepEquiOriented A B C D H

Commentaire : Selon le type de H :

- une relation de même orientation des quatre points : en utilisant les axiomes,
- une relation de même orientation avec deux points différents : par transitivité,
- une assertion d'appartenance à une demi-droite, de relation entre, une assertion de segment : par définition,
- une assertion de parallélogramme : comme côtés opposés d'un parallélogramme,
- une égalité de points : par réécriture.

58.3.13 stepOpenRay A B C H

Commentaire :

- une assertion d'appartenance à une demi-droite, de segment, de même orientation : par définition,
- une assertion d'égalité d'angles, de congruence d'angles : par appartenance à un côté,
- une assertion d'angle nul : par définition de l'angle nul,
- une égalité de points : par réécriture.

58.3.14 stepEquiOrientedClockwise H

Commentaire : Cas d'un but étant une relation dextrogyre et d'une hypothèse de même orientation de quatre points dont deux apparaissent dans le but.

58.3.15 stepOpenRayClockwise H

Commentaire : Cas d'un but étant une relation dextrogyre et d'une hypothèse d'appartenance à une demi-droite dont deux points apparaissent dans le but.

58.3.16 stepBetweenClockwise H

Commentaire : Cas d'un but étant une relation dextrogyre et d'une hypothèse de relation entre dont deux points apparaissent dans le but.

58.3.17 stepClockwise H

Commentaire : Selon le type de H :

- H permet d'appeler l'une des trois tactiques précédentes,
- une relation dextrogyre : en utilisant l'alignement de points avec les points du but,
- une égalité : par réécriture,
- une assertion dans laquelle apparaît une médiatrice : en utilisant les orientations lors de la construction de la médiatrice.

58.3.18 stepBetweenSupplement A B C D

Commentaire : Des angles suppléments ayant un côté commun, même sommet, leurs deux autres côtés sont soit opposés soit confondus. Une hypothèse d'angles suppléments peut servir à prouver une relation entre.

58.3.19 stepBetweenOpposed A B C D E

Commentaire : Par définition d'angles opposés.

58.3.20 stepBetween A B D H

Commentaire : Selon le type de H :

- trois points alignés dont deux sont paramètres d'appel : par transitivité,
- une assertion d'angles suppléments ou congruents : en utilisant les deux tactiques précédentes,
- un point : cas particulier de l'angle plat,
- une égalité : par réécriture.

58.3.21 stepSegment A B C H

Commentaire : Selon le type de H :

- une relation de même orientation ou de demi-droite fermée : par transitivité,
- une égalité : par réécriture,
- sinon : par définition.

58.3.22 stepTriangleSpec A B C D E F H

Commentaire : Selon le type de H :

- une égalité : par réécriture,
- une assertion de spécification du triangle : par identification à ce triangle.

58.3.23 stepOnLine d M H

Commentaire : Selon le type de H :

- H est une droite : par définition,
- une égalité de droite : par réécriture,
- une assertion de colinéarité : si les points appartiennent aussi à la droite.

58.3.24 StepTStrict t H

Commentaire : Par égalité avec un triangle non dégénéré désigné par H.

58.3.25 stepTCongruent H

Commentaire : Applique la transitivité de la relation de congruence sur les triangles.

58.3.26 stepStrictParallelogramm A B C D H

Commentaire : Selon le type de H :

- une assertion de parallelogramm avec les mêmes sommets : par définition,
- une égalité de distance : par égalité de côtés,
- une relation dextrogyre : par orientation,
- une assertion de congruence d'angles : par égalité d'angles opposés,
- une assertion d'angles suppléments : dans un parallelogramme, deux angles adjascents sont supplémentaires.

58.3.27 stepParallelogramm A B C D H

Commentaire : Selon le type de H :

- un point : par définition,
- une inégalité de points : par définition,
- une égalté de distance : par égalité de côtés (il faut que le parallelogramme soit strict).

58.3.28 stepEqLine d1 d2 H

Commentaire : Selon le type de H :

- H est une droite : par transitivité de la superposition des droites,
- une égalité de droite : par transitivité,
- une inégalité de points : comme ayant deux points communs,
- H est un couple de points : comme ayant deux points communs,
- une assertion de droites parallèles : deux droites parallèles ayant un point commun sont superposées,
- H est un couple formé d'un point et d'une droite : deux droites parallèles ou perpendiculaire à une même troisième ayant un point commun sont superposées.

58.3.29 stepParallelLines d1 d2 H

Commentaire : Selon le type de H :

- H est une droite : par transitivité,
- une assertion de droites superposées : si deux droites sont superposées, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre,
- une assertion de droites parallèles : si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre,
- une assertion de droites perpendiculaires : deux droites perpendiculaire à une même troisième sont parallèles.

58.3.30 stepSecantLines d1 d2 H

Commentaire : Selon le type de H :

- H est un couple de points : l'un appartient aux deux droites, l'autre à une seule,

- H est un couple de bipoints : les points du premier bipoint appartiennent à une des droites, les points de l'autre à l'autre droite et sont de part et d'autre des points du premier,

- H est un couple de droites : si dans les hypothèses, il y a

  - le parallélisme entre une de ces droites avec une des droites du but, on utilise le fait que deux droites parallèles à deux droites sécantes sont sécantes,
  - la perpendicularité entre une de ces droites avec une des droites du but, on utilise le fait que deux droites perpendiculaires à deux droites sécantes sont sécantes,

- une égalité de droites : par réécriture,

- une assertion de droites sécantes : en montrant la superposition des droites du but à ces droites,

- une assertion de droites parallèles : toute sécante à l'une est sécante à l'autre.

58.3.31 stepPerpendicular d1 d2 H

Commentaire : Si H est un triplet de points, on utilise la définition sinon selon le type de H :

- une égalité de droites : par réécriture,

- une assertion de droites perpendiculaires : en montrant la superposition des droites du but à ces droites,

- une assertion de droites parallèles : toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

58.4 La tactique step

Cette tactique échoue lorsqu'elle ne parvient pas à progresser.

58.4.1 step H

Enoncé : *En utilisant H*

Commentaire : Elle procède par filtrage sur l'opérateur de tête du but à résoudre :

- c'est une conjonction de deux buts, on applique *step* H aux deux,
- c'est une disjonction, on applique *step* H au premier, en cas d'échec on applique *step* H au second,
- c'est une égalité, sont traités dans l'ordre les cas suivants en appellant la sous tactique correspondante:
  - l'un des membres est une somme de distance,
  - l'un des membres est un produit de distance par un entier,
  - l'un des membres est une distance,
  - l'un des membres est un angle,
  - l'un des membres est le paramètre H,
  - autres cas.
- c'est un prédicat, on appelle la sous tactique correspondante à l'identificateur de la relation,
- si H est une implication, on cherche à l'appliquer au but.

Leçon 59

D'autres tactiques

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `Tactics3_Others.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Ce chapitre regroupe toutes les tactiques proposées pour le raisonnement en géométrie plane qui ne soient ni les tactiques *immediate* et *step* vues précédemment, ni les tactiques de constructions qui feront l'objet du chapitre suivant.

59.1 Rappel

Ces tactiques sont utilisées dans *immediate* ou dans *step*, elles ont donc été définies au début de la leçon 57. Comme leur place logique est ici, nous les rappelons et nous y ajoutons *simplLineHyp* :

59.1.1 contrapose H

Enoncé : *Par contraposition avec l'hypothèse H.*

59.1.2 simplLine

Enoncé : *Par simplification en utilisant les définitions relatives à la droite.*

59.1.3 simplLineHyp H

Enoncé : *Par simplification dans l'hypothèse H en utilisant les définitions relatives à la droite.*

59.1.4 simplCircle

Enoncé : *Par simplification en utilisant les définitions relatives au cercle.*

59.1.5 simplCircleHyp H

Enoncé : *Par simplification de l'hypothèse H en utilisant les définitions relatives au cercle.*

59.1.6 canonize

Enoncé : *Par simplification en utilisant les définitions relatives à l'orientation.*

59.1.7 simplGoal

Enoncé : *Par simplification du but en utilisant les définitions relatives à l'orientation.*

59.1.8 splitIsAngle

Enoncé : *tactique interne.*

59.1.9 simplDistance

Enoncé : *En simplifiant.*

59.1.10 DestructSP

Enoncé : *Un parallélogramme strict est un parallélogramme*

59.1.11 solveDistance

Enoncé : *Par calcul de distance.*

59.1.12 eqToCongruent

Enoncé : *En transformant les égalités d'angles en relation de congruence.*

59.2 Raisonnement par l'absurde

Le but est démontré lorsque l'on fait apparaître une contradiction dans les hypothèses. Nous n'envisageons que les cas les plus fréquents, une hypothèse absurde ou deux hypothèses contradictoires.

59.2.1 absurdHyp H

Enoncé : *L'hypothèse H est absurde.*

Commentaire : Cette tactique liste des cas simples.

59.2.2 exactClockwise H

Enoncé : *Tactique interne.*

Commentaire : Le but traduit la même assertion dextrogyre que l'hypothèse H.

59.2.3 exactCollinear H

Enoncé : *Tactique interne.*

Commentaire : Le but traduit la même assertion de colinéarité que l'hypothèse H.

59.2.4 contradict H1 H2

Enoncé : *Les hypothèses H1 et H2 sont contradictoires.*

Commentaire : Cette tactique liste un certain nombre de cas, majoritairement des contradictions entre alignement et orientation.

59.3 Raisonnement par cas

Ce type de raisonnement est très fréquent en géométrie.

59.3.1 by4Cases A B C

Enoncé : *Les points A, B, C sont soit dextrogyres, soit sinistrogyres, soit C est sur $]AB)$, soit C est sur $]BA)$.*

59.3.2 by3Cases A B C

Enoncé : *Les points A, B, C sont soit dextrogyres, soit sinistrogyres, soit alignés.*

59.3.3 by2Cases H

Enoncé : Selon la nature de H :

- $\overline{ABC}$: *C est sur $]AB)$ ou C est sur $]BA)$,*
- $\neg\overline{ABC}$: *Les points A, B, C sont soit dextrogyres, soit sinistrogyres,*
- $\not\circlearrowright ABC$: *Les points A, B, C sont soit sinistrogyres, soit alignés.*

59.3.4 by2OnLineCases d M

Enoncé : *Le point M appartient ou non à la droite d.*

59.3.5 by3SegmentCases H

Enoncé : *Si les points A, B, C sont alignés, l'un est entre les deux autres.*

59.3.6 byApartCases A B C

Enoncé : *Si les points A et B sont distincts, C est distinct de l'un ou de l'autre.*

59.4 La relation de Chasles

59.4.1 usingChasles A B C

Enoncé : *En utilisant la relation de Chasles entre les points A, B et C*

Commentaire : On cherche dans le but une occurrence de $AB+BC$, $BA+BC$, $AB+CB$, $BA+CB$, $BC+AB$, $BC+BA$, $CB+AB$ ou $CB+BA$ que l'on remplace par AC, sinon on cherche une occurrence de AC ou de CA que l'on remplace par $AB+BC$, dans tous les cas, si on ne peut déduire automatiquement que B appartient au segment $[AC]$, il sera demandé à l'utilisateur de le prouver.

59.4.2 usingChaslesRec

Enoncé : *En utilisant la réciproque de la relation de Chasles*

Commentaire : Cette tactique s'applique à un but de la forme $B \in [AC]$, auquel est substitué le but $AB + BC = AC$ que la tactique tente de résoudre par *solveDistance* et qui, sinon restera à la charge de l'utilisateur.

59.5 Transformer les congruences d'angles en égalités

La tactique *eqToCongruent* rappelée au premier paragraphe et détaillée dans le livre 57 remplace toutes les égalités d'angles par des relations de congruence et les égalités d'angles supplémentaires par des relations de supplément, c'est la transformation facile puisqu'elle rend implicites les inégalités entre points. La transformation inverse est plus délicate. Lorsque la relation de congruence est une hypothèse, il suffit de la déplier mais lorsqu'elle apparaît dans le but, il faut alors démontrer toutes les inégalités. De même avec les suppléments.

59.5.1 congruentToEqAngleHed A B C D E F Hba Hbc Hed

Enoncé : *Tactique interne.*

Commentaire : Cherche l'hypothèse $Hef : E \neq F$ et remplace dans le but les occurrences de $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$ par $\angle ABCHbaHbc = \angle DEFHedHef$.

59.5.2 congruentToEqAngleHbc A B C D E F Hba Hbc

Enoncé : *Tactique interne.*

Commentaire : Cherche l'hypothèse $Hed : E \neq D$ et appelle *congruentToEqAngleHed A B C D E F Hba Hbc Hed*.

59.5.3 congruentToEqAngleHba A B C D E F Hba

Enoncé : *Tactique interne.*

Commentaire : Cherche l'hypothèse $Hbc : B \neq C$ et appelle *congruentToEqAngleHbc A B C D E F Hba Hbc*.

59.5.4 supplementAngleHed A B C D E F Hba Hbc Hed

Enoncé : *Tactique interne.*

Commentaire : Cherche l'hypothèse $Hef : E \neq F$ et remplace dans le but les occurrences de $\widehat{ABC} \leftthreetimes \widehat{DEF}$ par $\angle ABCHbaHbc = (\angle DEF\check{H}edHef)$.

59.5.5 supplementAngleHbc A B C D E F Hba Hbc

Enoncé : *Tactique interne.*

Commentaire : Cherche l'hypothèse $Hed : E \neq D$ et appelle *supplementAngleHed A B C D E F Hba Hbc Hed*.

59.5.6 supplementAngleHba A B C D E F Hba

Enoncé : *Tactique interne.*

Commentaire : Cherche l'hypothèse $Hbc : B \neq C$ et appelle *supplementAngleHbc A B C D E F Hba Hbc*.

59.5.7 congruentToEq

Enoncé : *En remplaçant les relations d'angles par des égalités.*

Commentaire : Recherche toutes les hypothèses d'angles congruents et d'angles suppléments et les déplient (cela peut créer de nombreuses hypothèses éventuellement redondantes d'inégalités entre points, 4 par hypothèse dépliée). Recherche alors toutes les occurrences de relations de congruence ou de supplémentarité entre angles dans le but et les remplace par des égalités en faisant appel aux tactiques précédentes. Cela peut induire de nouveaux buts demandant à l'utilisateur de prouver des inégalités de points lorsque celles-ci ne peuvent être inférées automatiquement.

59.6 Egalité de triangles

Nous avions déjà dans le livre 57 préparé le travail en écrivant les tactiques *usingSSS*, *usingSASa*, *usingSASb*, *usingSASc*, *usingASAab*, *usingASAbc* et *usingASAac*. Il suffira de les appeler puis d'essayer d'effacer les prémisses avec *immediate* pour obtenir les tactiques agissant sur un but demandant de prouver la congruence de deux triangles :

59.6.1 SSS

Enoncé : *En appliquant le premier cas d'égalité des triangles.*

59.6.2 ASS

Enoncé : *En appliquant le deuxième cas d'égalité des triangles.*

59.6.3 SAS

Enoncé : *En appliquant le deuxième cas d'égalité des triangles.*

59.6.4 SSA

Enoncé : *En appliquant le deuxième cas d'égalité des triangles.*

59.6.5 AAS

Enoncé : *En appliquant le troisième cas d'égalité des triangles.*

59.6.6 SAA

Enoncé : *En appliquant le troisième cas d'égalité des triangles.*

59.6.7 ASA

Enoncé : *En appliquant le troisième cas d'égalité des triangles.*

59.7 La propriété de Pasch

59.7.1 byPaschCases A B C D l E

Enoncé : *D'après Pasch, la droite l coupant le triangle A B C en un point D sur le côté AB, elle coupe le triangle sur un autre côté en un point E.*

Commentaire La tactique s'assure d'abord de preuves de :

- A, B, C non colinéaires,
- D est entre A et B,
- l passe par D,
- l ne passe pas par A,
- l ne passe pas par B,
- l ne passe pas par C,

soit grâce à la tactique *immediate* soit avec l'aide de l'utilisateur, puis applique *Pasch* pour décomposer en deux cas :

- E est entre B et C,
- E est entre A et C.

59.8 Tactiques d'articulation

Ces tactiques permettent d'articuler un raisonnement en proposant de nouvelles assertions ou solutions.

59.8.1 since txt

Enoncé : *Puisque l'on a "txt".*

Commentaire "txt" est l'énoncé d'une assertion. Si *immediate* parvient à la démontrer, elle se retrouve dans les hypothèses et l'on peut l'utiliser pour poursuivre la preuve. Dans le cas contraire, elle devient le but courant dont l'utilisateur doit d'abord faire la preuve afin de l'introduire dans les hypothèses et pouvoir poursuivre.

59.8.2 from H txt

Enoncé : *De H on déduit "txt".*

Commentaire "txt" est l'énoncé d'une assertion qui se montre à l'aide de l'hypothèse H. Soit *step H; try immediate* parvient à la démontrer complètement, soit il demeure des prémisses que l'utilisateur doit prouver, avant de pouvoir poursuivre.

59.8.3 asWeHave txt

Enoncé : *En utilisant "txt".*

Commentaire "txt" est l'énoncé d'une assertion (*Hyp : text*) que la tactique *immediate* démontre et que l'on utilise (*step Hyp*) pour poursuivre la preuve.

59.8.4 answerIs X

Enoncé : *X répond à la question.*

Commentaire Cette tactique permet de progresser dans un but quantifié existentiellement soit par un "il existe" (dans Prop) soit par un "on sait construire" (dans Set).

Leçon 60

Tactiques de constructions

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `Tactics4_Constructions.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Ce chapitre regroupe toutes les tactiques proposées pour faire des constructions de point, de droite ou de cercle. Toutes ces tactiques fonctionnent sur le même principe, les preuves des prémisses nécessaires sont d'abord recherchées automatiquement, puis en cas d'insuccès, sont demandées à l'utilisateur. L'objet est alors créé, il apparaît dans les hypothèses avec son constructeur. Enfin, la tactique ajoute aux hypothèses les propriétés les plus importantes de l'objet créé.

60.1 Constructions de base

60.1.1 setLine A B lineAB

Enoncé : *Soit "lineAB" la droite passant par A et B.*

Prérequis : la preuve de $Hab : A \neq B$.

Construction : la droite *lineAB := Ruler A B Hab*.

Propriétés ajoutées aux hypothèses: aucune.

60.1.2 setCircle C A B gamma

Enoncé : *Soit "gamma" le cercle de centre C et de rayon AB.*

Prérequis : aucun.

Construction : le cercle *gamma := Compass C A B*.

Propriétés ajoutées aux hypothèses: aucune.

60.1.3 setIntersectionCircles c1 c2 M

Enoncé : *Soit "M" le point d'intersection des cercles* $c1$ *et* $c2$.

Prérequis : les cercles sont sécants $H : c1 \between c2$.

Construction : le point $M := \mathit{IntersectionCirclesPoint\ c1\ c2\ H}$.

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $M \in c1$,
- $M \in c2$,
- $\not\circlearrowright \odot c2\ M\ \ \odot c1$.

60.1.4 setClockwise A B C

Enoncé : *Soit "C" un point dextrogyre avec* A *et* B.

Prérequis : $H : A \neq B$.

Construction : le point $C := \mathit{ExistsClockwise\ A\ B\ H}$.

Propriétés ajoutées aux hypothèses: $\circlearrowright ACB$.

60.2 Intersections de droites

60.2.1 setInterLines l1 l2 M

Enoncé : *Soit "M" le le point d'intersection des droites* $l1$ *et* $l2$.

Prérequis : les droites sont sécantes $H : l1 \nparallel l2$.

Construction : le point $M := \mathit{InterLinesPoint\ l1\ l2\ H}$.

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $M \in l1$,
- $M \in l2$.

60.2.2 setNotEquiDirectedInter A B C D E

Enoncé : *Soit "E" le point d'intersection de la droite* (AB) *et de la droite* (CD).

Prérequis : $H : \neg AB \Lsh\!\Rsh CD$.

Construction : le point $E := \mathit{NotEquiDirectedInterPoint\ A\ B\ C\ D\ H}$.

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $\overline{ABE}$,
- $\overline{CDE}$.

60.2.3 setFourPointsInter A B C D E

Enoncé : *Soit "E" le point d'intersection de la droite* (AB) *et de la droite* (CD).

Prérequis :

- $H1 : \circlearrowleft ABC$,
- $H2 : \circlearrowleft BAD$.

Construction : le point *E := FourPointsInterPoint A B C D H1 H2.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $\overline{ABE}$,
- $C - E - D$.

60.3 Intersections d'un cercle et un diamètre

60.3.1 setInterDiameter l c M

Enoncé : *Soit "M" le point d'intersection du cercle c et de son diamètre l.*

Prérequis : $H : l \oslash c$.

Construction : le point *M := InterDiameterPoint l c H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $\odot c\ M \Rsh\Rsh l^{\triangleleft}\ l^{\triangleright}$,
- $M \in c$,
- $M \in l$.

60.3.2 setSecondInterDiameter l c M

Enoncé : *Soit "M" le second point d'intersection du cercle c et de son diamètre l.*

Prérequis : $H : l \oslash c$.

Construction : le point *M := SecondInterDiameterPoint l c H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $\odot c\ M \Rsh\Rsh\ l^{\triangleright}\ l^{\triangleleft}$,
- $M \in c$,
- $M \in l$.

60.4 Marquages de points sur une droite

60.4.1 setAddSegment A B C D E M

Enoncé : *Soit "M" le point de l'axe* (AB) *à distance* DE *de* C.

Prérequis :

- $H : A \neq B$,
- $H0 : \overline{ABC}$.

Construction : le point *M := AddSegmentPoint A B C D E H H0.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $CM \Rsh\Rsh AB$,
- $CM = DE$,
- $\overline{ABM}$.

60.4.2 setMarkSegment A B C D M

Enoncé : *Soit "M" le point de l'axe* (AB) *à distance* CD *de* A.

Prérequis : $H : A \neq B$.

Construction : le point *M := MarkSegmentPoint A B C D H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $AM = CD$,
- $M \in [AB)$.

60.4.3 setOppSegment A B C D M

Enoncé : *Soit "M" le point de l'axe* (BA) *à distance* CD *de* A.

Prérequis : $H : A \neq B$.

Construction : le point *M := OppSegmentPoint A B C D H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $AM = CD$,
- $A \in [MB]$.

60.4.4 setSymmetric A B M

Enoncé : *Soit "M" le symétrique de A par rapport à B.*

Prérequis : $H : A \neq B$.

Construction : le point *M := SymmetricPoint A B H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $BM = AB$,
- $A - B - M$.

60.4.5 setGraduation n A B M

Enoncé : *Soit "M" la nième graduation de l'axe* (AB).

Prérequis : $H : A \neq B$.

Construction : le point *M := Graduation n A B H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $M \in [AB)$,
- $AM = n * AB$.

60.5 Angles et triangles

60.5.1 setAngle A B C alpha

Enoncé : *Soit "alpha" l'angle ABC.*

Prérequis :

- $Hba : B \neq A$,
- $Hba : B \neq C$.

Construction : l'angle *alpha := Angle A B C Hba Hbc* (Rappel : un angle est un point du demi-cercle unité).

Propriétés ajoutées aux hypothèses: aucune.

60.5.2 setEquilateral A B C

Enoncé : *Soit "C" le troisième sommet du triangle équilatéral construit sur la base AB.*

Prérequis : $H : A \neq B$.

Construction : le point C := *ExistsClockwise A B H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $\circlearrowright ACB$,
- $\overset{\triangle}{\dot{A}\dot{C}\dot{B}}$.

60.5.3 setTCongruent A B C D E F

Enoncé : *Soit "F" le troisième sommet du triangle congruent au triangle ABC construit sur la base DE.*

Prérequis :

- $Hab : A \neq B$,
- $He : AB = DE$

Construction : le point F := *ThirdVertex A B C D E Hab He.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $A\overset{\triangle}{B}C \equiv D\overset{\triangle}{E}F$,
- $\not\circlearrowright DEF$.

60.5.4 setTCongruentClockwise A B C D E F

Enoncé : *Soit "F" le troisième sommet du triangle dextrogyre congruent au triangle ABC construit sur la base DE.*

Prérequis :

- $Hn : \neg\overline{ABC}$,
- $Hab : A \neq B$,
- $He : AB = DE$

Construction : le point F := *ThirdVertex A B C D E Hab He.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $\overset{\triangle}{ABC} \equiv \overset{\triangle}{DEF}$,
- $\circlearrowright DFE$.

60.5.5 setTriangle A B C t

Enoncé : *Soit "t" le triangle ABC.*

Prérequis : aucun.

Construction : le triangle *t := Tr A B C.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses: aucune.

60.5.6 setSupplementary alpha beta

Enoncé : *Soit "beta" l'angle supplémentaire de alpha.*

Prérequis : $H : \angle\alpha$.

Construction : l'angle *beta := Supplementary alpha H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses: $\angle\beta$.

60.6 Médiatrice et de milieu

60.6.1 setMidLine A B m

Enoncé : *Soit "m" la médiatrice de* $[AB]$.

Prérequis : $H : A \neq B$.

Construction : la droite *m := MidLine A B H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $\forall M, M \in m \Rightarrow MA = MB$,
- $\forall M, MA = MB \Rightarrow M \in m$,
- $(AB) \perp m$.

60.6.2 setMidPoint A B C

Enoncé : *Soit "C" le milieu de* $[AB]$.

Prérequis : $H : A \neq B$.

Construction : la droite C := *MidPoint A B H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $A - C - B$,
- $AC = CB$.

60.7 Parallélogramme

60.7.1 setParallelogramm A B C D

Enoncé : *Soit "D" le quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.*

Prérequis :

- $Hac : A \neq C$,
- $Hbk : B \neq (A \mid C)$.

Construction : le point D := *SymmetricPoint B (Midpoint A C Hac) Hbk.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses: $\sharp ABCD$.

60.7.2 setStrictParallelogramm A B C D

Enoncé : *Soit "D" le quatrième sommet du parallélogramme strict $ABCD$.*

Prérequis : $H :\circlearrowleft ABC$.

Construction : le point D := *StrictVertex4 A B C H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses: $\sharp^{\circlearrowleft} ABCD$.

60.7.3 setParallelogrammCenter A B C D K

Enoncé : *Soit "K" le centre du parallélogramme $ABCD$.*

Prérequis : $H : \sharp ABCD$.

Construction : le point K := *PCenter A B C D H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $A - K - C$,
- $B - K - D$,
- $KA = KC$,
- $KB = KD$.

60.7.4 setStrictParallelogrammCenter A B C D K

Enoncé : *Soit "K" le centre du parallélogramme strict* $ABCD$.

Prérequis : $H : \sharp^{\circlearrowright} ABCD$.

Construction : le point K := *SPCenter A B C D H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $\sharp ABCD$,
- $\circlearrowright ABC$,
- $\circlearrowright ABK$,
- $\circlearrowright BCK$,
- $\circlearrowright CDK$,
- $\circlearrowright DAK$,
- $\overset{\odot}{\sharp} ABCD = K$,
- $A - K - C$,
- $B - K - D$,
- $KA = KC$,
- $KB = KD$.

60.8 Droite perpendiculaire ou parallèle

60.8.1 setPerpendicularPoint d1 d2 M

Enoncé : *Soit "M" le point d'intersection des droites perpendiculaires* $d1$ *et* $d2$.

Prérequis : $H : d1 \perp d2$.

Construction : le point M := *PerpendicularPoint d1 d2 H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $M \in d1$,
- $M \in d2$.

60.8.2 setPerpendicularDown l1 A l2

Enoncé : *Soit "l2" la perpendiculaire à* $l1$ *abaissée de* A.

Prérequis : $H : A \notin l1$.

Construction : la droite *l2 := PerpendicularDown l1 A H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $M \in l2$,
- $l1 \perp l2$.

60.8.3 setPerpendicularUp l1 A l2

Enoncé : *Soit "l2" la perpendiculaire à* $l1$ *élevée de* A.

Prérequis : $H : A \in l1$.

Construction : la droite *l2 := PerpendicularUp l1 A H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $M \in l2$,
- $l1 \perp l2$.

60.8.4 setParallel l1 A l2

Enoncé : *Soit "l2" la parallèle à* $l1$ *passant par* A.

Prérequis : $H : A \notin l1$.

Construction : la droite *l2 := Parallel l1 A H.*

Propriétés ajoutées aux hypothèses:

- $M \in l2$,
- $l1 \parallel l2$.

Livre 16 : Annexe 2 : Axiomatique de Hilbert

A propos de ce tome : Deux problèmes se posent lorsque l'on définit une axiomatique, est-elle cohérente ? est-elle complète ?

Pour ce qui nous concerne, la cohérence vient de ce que tous les axiomes énoncés (dans le tome 1) sont vrais dans la géométrie plane usuelle. Toutefois, l'implémentation en *Coq* souffre de liberté prise avec le calcul des constructions, comme nous l'avons signalé déjà.

Pour montrer la complétude, nous avons choisi de montrer que tous les axiomes de Hilbert, à l'exception de l'axiome de Dedekind ou celui de Cantor sur la droite réelle, sont des théorèmes dans notre géométrie. Les énoncés variant légérement d'une référence à l'autre nous avons pris celle de **Geometry : Euclid and beyond** de *Robin Hartshorne* chez *Springer.* Bien entendu, il nous faut adapter ces axiomes, par exemple l'égalité entre droites chez Hilbert va être remplacée par la relation d'équivalence de superposition. De ce fait, il ne s'agit pas d'une démonstration rigoureuse mais d'un moyen de se convaincre que l'on construit bien une géométrie du plan.

Les leçons suivantes suivront le plan des axiomes de Hilbert : incidence, ordre, congruence, continuité et parallélisme.

Leçon 61

Axiomes d'incidence

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `Hilbert1.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Ce chapitre étudie les axiomes d'incidence de Hilbert dans le cadre de notre géométrie plane.

61.1 Axiome I1

Enoncé : *Il existe une droite passant par deux points, si les point sont distincts la droite est unique.*

Lemme 1 :

$$\forall\ A\ B,\ \exists\ d,\ A \in d\ \wedge\ B \in d.$$

Preuve :

- On distingue deux cas selon que $A \neq O$ ou $A \neq U$ (apartness).
- $A \neq O$:
  - On distingue trois cas selon la position des trois points O, A et B :
  - $\circlearrowleft OAB$: puisque $A \neq B$, le réponse est (AB),
  - $\circlearrowleft AOB$: puisque $A \neq B$, le réponse est (AB),
  - $\overline{OAB}$: puisque $O \neq A$, le réponse est (OA),
- $A \neq U$:
  - On distingue trois cas selon la position des trois points U, A et B :
  - $\circlearrowleft UAB$: puisque $A \neq B$, le réponse est (AB),
  - $\circlearrowleft AUB$: puisque $A \neq B$, le réponse est (AB),
  - $\overline{UAB}$: puisque $U \neq A$, le réponse est (UA).

Lemme 2 :

$$\forall\ A\ B,\ \forall\ d1\ d2,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ A \in d1\ \wedge \\ B \in d1\ \wedge \\ A \in d2\ \wedge \\ B \in d2 \end{array}\right\} \Rightarrow d1 = d2.$$

Preuve : Exercice 10 leçon 47.

Remarque : L'énoncé a été divisé en deux lemmes car dans notre géométrie, il existe une infinité de droites passant par deux points, mais lorsque les points sont distincts, toutes ces droites sont superposées.

61.2 Axiome I2

Enoncé : *Toute droite passe par au moins deux points.*

Lemme 1 :

$$\forall\ d,\ \exists\ A,\ \exists\ B,\ A \neq B\ \wedge\ A \in d\ \wedge\ B \in d.$$

Preuve : Il suffit d'observer la construction de d, ses deux points de construction répondent à la question.

61.3 Axiome I3

Enoncé : *Il existe au moins trois points qui ne sont pas colinéaires.*

Lemme 1 :

$$\exists\ A,\ \exists\ B,\ \exists\ C,\ \forall\ d,\ \neg(A \in d\ \wedge\ B \in d\ \wedge\ C \in d).$$

Preuve : Considérons les points O, U et V, comme ces trois points ne sont pas colinéaires (ex. 4, leçon 40), ils répondent à la question.

Leçon 62

Axiomes d'ordre

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `Hilbert2.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Ce chapitre étudie les axiomes d'ordre de Hilbert dans le cadre de notre géométrie plane.

62.1 Axiome B1

Enoncé : *Si B est entre A et C, alors A, B et C sont trois points distincts d'une droite et B est aussi entre C et A.*

Lemme B1a :

$$\forall\ A\ B\ C,\ A - B - C \Rightarrow\ A \neq B.$$

Preuve : Exercice 2 leçon 11.

Lemme B1b :

$$\forall\ A\ B\ C,\ A - B - C \Rightarrow\ B \neq C.$$

Preuve : Exercice 2 leçon 20.

Lemme B1c :

$$\forall\ A\ B\ C,\ A - B - C \Rightarrow\ C \neq A.$$

Preuve : Exercice 4 leçon 20.

Lemme B1d :

$$\forall\ A\ B\ C,\ A - B - C \Rightarrow\ \overline{ABC}.$$

Preuve : Exercice 1 leçon 11.

Lemme B1e :

$$\forall\ A\ B\ C,\ A - B - C \Rightarrow\ C - B - A.$$

Preuve : Exercice 3 leçon 20.

62.2 Axiome B2

Enoncé : *Quels que soient les deux points distincts A et B, il existe un point C tel que B est entre A et C.*

Lemme B2 :

$$\forall\ A\ B,\ A \neq B \Rightarrow\ \exists\ C,\ A - B - C.$$

Preuve : Une réponse est C est le symétrique de A par rapport à B.

62.3 Axiome B3

Enoncé : *Etant donnés trois points distincts d'une droite l'un d'entre eux et seulement lui est entre les deux autres.*

Lemme B3a :

$$\forall\ A\ B\ C,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B \wedge \\ B \neq C \wedge \\ C \neq A \wedge \\ \overline{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A - B - C \vee \\ B - C - A \vee \\ C - A - B. \end{array}\right.$$

Preuve : On utilise la division en trois cas (ex. 10 leçon 10) puis le passage de segment à relation entre (ex. 14 leçon 11).

Lemme B3b :

$$\forall\ A\ B\ C,\ A - B - C \Rightarrow\ \neg(B - A - C).$$

Preuve : On raisonne par l'absurde, on aurait alors (ex. 6 leçon 20) $C - A - C$ donc $C \neq C$.

Lemme B3c :

$$\forall\ A\ B\ C,\ A - B - C \Rightarrow\ \neg(A - C - B).$$

Preuve : On raisonne par l'absurde, on aurait alors (ex. 6 leçon 20) $A - B - A$ donc $A \neq A$.

62.4 Axiome de Pasch

Enoncé : *Etant donnés trois points A, B et C non alignés, et L une droite ne passant ni par A, ni par B, ni par C. Si L passe par un point D situé entre A et B, alors L passe par un point entre B et C ou un point entre A et C mais pas par l'un et l'autre.*

Lemme B4a :

$$\forall\ A\ B\ C\ M\ N,\ \left.\begin{array}{l} \neg\overline{ABC}\ \wedge \\ A-M-B\ \wedge \\ \neg\overline{AMN}\ \wedge \\ \neg\overline{BMN}\ \wedge \\ \neg\overline{CMN} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\ P,\ \overline{MNP}\ \wedge\ A-P-C \\ \vee \\ \exists\ P,\ \overline{MNP}\ \wedge\ B-P-C. \end{array}\right.$$

Preuve : On applique le théorème de la leçon 24.

Lemme B4b :

$$\forall\ A\ B\ C\ M\ N\ P\ Q, \neg \left\{\begin{array}{l} \neg\overline{ABC}\ \wedge \\ A-M-B\ \wedge \\ \neg\overline{AMN}\ \wedge \\ \neg\overline{BMN}\ \wedge \\ \neg\overline{CMN}\ \wedge \\ \overline{MNP}\ \wedge \\ A-P-C\ \wedge \\ \overline{MNP}\ \wedge \\ B-P-C. \end{array}\right.$$

Preuve : Ce résultat n'est pas immédiat. On démontre :

- que $M \neq P$ par l'absurde, sinon $\overline{AMB} \Rightarrow \overline{APB} \Rightarrow \overline{ABC}$,
- que $M \neq Q$ de même par l'absurde,
- que $P \neq Q$ de même par l'absurde,
- comme $\overline{MPQ}$, on décompose en trois cas grâce au lemme B3a ci-dessus :
  - $M-P-Q$: impossible car on ne peut avoir ni $\circlearrowleft ABC$, ni $\circlearrowleft BAC$:
    - $\circlearrowleft ABC \Rightarrow \circlearrowleft ABP \Rightarrow \circlearrowleft MPA \Rightarrow \circlearrowleft APQ \Rightarrow \circlearrowleft CQA \Rightarrow \circlearrowleft ACB$,
    - $\circlearrowleft BAC \Rightarrow \circlearrowleft ACQ \Rightarrow \circlearrowleft PQA \Rightarrow \circlearrowleft AMP \Rightarrow \circlearrowleft PAB \Rightarrow \circlearrowleft ABC$,
  - $P-Q-M$: impossible car on ne peut avoir ni $\circlearrowleft ABC$, ni $\circlearrowleft BAC$:
    - $\circlearrowleft ABC \Rightarrow \circlearrowleft BCM \Rightarrow \circlearrowleft QMB \Rightarrow \circlearrowleft QBP \Rightarrow \circlearrowleft PCB \Rightarrow \circlearrowleft ACB$,
    - $\circlearrowleft BAC \Rightarrow \circlearrowleft CBP \Rightarrow \circlearrowleft PQB \Rightarrow \circlearrowleft BQM \Rightarrow \circlearrowleft MBC \Rightarrow \circlearrowleft ABC$,
  - $Q-M-P$: impossible car on ne peut avoir ni $\circlearrowleft ABC$, ni $\circlearrowleft BAC$:
    - $\circlearrowleft ABC \Rightarrow \circlearrowleft ABQ \Rightarrow \circlearrowleft MQA \Rightarrow \circlearrowleft APM \Rightarrow \circlearrowleft MAC \Rightarrow \circlearrowleft ACB$,
    - $\circlearrowleft BAC \Rightarrow \circlearrowleft ACM \Rightarrow \circlearrowleft PMA \Rightarrow \circlearrowleft AMQ \Rightarrow \circlearrowleft BQA \Rightarrow \circlearrowleft ABC$.

Leçon 63

Axiomes de congruence

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `Hilbert3.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Ce chapitre étudie les axiomes de congruence de Hilbert dans le cadre de notre géométrie plane.

63.1 Axiome C1

Enoncé : *Etant donnés un segment* $[AB]$ *et une demi-droite* $[Cr)$*, il existe un unique point* D *sur* $[Cr)$ *tel que* $AB = CD$*.*

Lemme C1a :

$$\forall\ A\ B\ C\ D,\ C \neq D\ \Rightarrow \exists\ E,\ E \in [CD)\ \wedge\ AB = CD.$$

Preuve : La réponse est le report de la distance AB sur la droite (CD) à partir de C (leçon 26).

Lemme C1b :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} C \neq D\ \wedge \\ E \in [CD)\ \wedge \\ AB = CE\ \wedge \\ F \in [CD)\ \wedge \\ AB = CF \end{array}\right\} \Rightarrow E = F.$$

Preuve : Unicité du report de la distance AB sur la droite (CD) à partir de C (leçon 26).

63.2 Axiome C2

Enoncé : *Si* $AB = CD$ *et* $AB = EF$*, alors* $CD = EF$*. Tout segment est congruent à lui-même.*

Lemme C2a :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ AB = CD \wedge AB = EF \Rightarrow\ CD = EF.$$

Preuve : La distance étant un point de $[OU)$, ce lemme découle des propriétés de l'égalité.

Lemme C2b :

$$\forall\ A\ B,\ AB = AB.$$

Preuve : La distance étant un point de $[OU)$, ce lemme découle des propriétés de l'égalité.

63.3 Axiome C3

Enoncé : *Etant donnés trois points A, B et C d'une droite tels que B soit entre A et C, et trois autres points D, E et F d'une droite tel que E soit entre D et F, si $AB = DE$ et $BC = EF$ alors $AC = DF$.*

Lemme C3 :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} A - B - C\ \wedge \\ D - E - F\ \wedge \\ AB = DE\ \wedge \\ BC = EF \end{array}\right\} \Rightarrow AC = DF.$$

Preuve : On utilise la relation de Chasles (leçon 14).

63.4 Axiome C4

Enoncé : *Etant donnés un angle $\angle BAC$ et une demi-droite $[DF)$, il existe une unique demi-droite $[DE)$ sur un côté donné de la droite (DF) telle que $\angle BAC = \angle EDF$.*

Lemme C4a :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ F,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ A \neq C\ \wedge \\ D \neq F \end{array}\right\} \Rightarrow\ \exists\ E, \left\{\begin{array}{l} D \neq E\ \wedge \\ \not\emptyset\ DFE\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}. \end{array}\right.$$

Preuve :

- Soit G la marque de la distance AC sur la droite (DF),
- soit E le troisième sommet du triangle $\overset{\triangle}{DGE}$ construit sur $]DG[$ congru à $\overset{\triangle}{ACB}$,
- le point E est solution car :

- $D \neq E$ car $DE = AB$,
- $\not\circlearrowright DFE$ car $\not\circlearrowright DGE$,
- $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$ car $A\overset{\triangle}{C}B \equiv D\overset{\triangle}{G}E$.

Lemme C4b :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ F,\ \left.\begin{array}{l} A \neq B\ \wedge \\ A \neq C\ \wedge \\ D \neq F \end{array}\right\} \Rightarrow\ \exists\ E, \left\{\begin{array}{l} D \neq E\ \wedge \\ \not\circlearrowright DEF\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}. \end{array}\right.$$

Preuve : Identique à la précédente avec E le troisième sommet du triangle $G\overset{\triangle}{D}E$ construit sur $]GD[$ congru à $C\overset{\triangle}{A}B$.

Lemme C4c :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ F\ E\ E',\ \left.\begin{array}{l} \not\circlearrowright DEF\ \wedge \\ \not\circlearrowright DE'F\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{E'DF} \end{array}\right\} \Rightarrow\ E' \in]DE).$$

Preuve : Exercice 3 leçon 29.

Lemme C4d :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ F\ E\ E',\ \left.\begin{array}{l} \not\circlearrowright DFE\ \wedge \\ \not\circlearrowright DFE'\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{E'DF} \end{array}\right\} \Rightarrow\ E' \in]DE).$$

Preuve : Exercice 4 leçon 29.

Remarque : Les angles ayant été défini par des triplets de points et non par des paires de demi-droites, les deux derniers lemmes ont pour objet de montrer que la propriété ne dépend pas du point choisi sur la demi-droite pour définir l'angle.

63.5 Axiome C5

Enoncé : *Etant donnés trois angles α, β et γ, si $\alpha = \beta$ et $\alpha = \gamma$, alors $\beta = \gamma$. Tout angle est congruent à lui-même.*

Lemme C5a :

$$\forall\ \alpha,\ \angle\alpha \Rightarrow\ \alpha = \alpha.$$

Preuve : L'angle étant un point du demi-cercle unité, ce lemme découle des propriétés de l'égalité.

Lemme C5b :

$$\forall\ \alpha\ \beta\ \gamma,\ \alpha = \beta\ \wedge \alpha = \gamma \Rightarrow\ \beta = \gamma.$$

Preuve : L'angle étant un point du demi-cercle unité, ce lemme découle des propriétés de l'égalité.

63.6 Axiome C6

Enoncé : *Etant donnés deux triangles $\overset{\triangle}{ACB}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$, si $AB = DE$, $AC = DF$ et $\angle BAC = \angle EDF$, alors les deux triangles sont congruents d'où $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$ et $\angle ACB = \angle DFE$.*

Lemme C6a :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} AB = DE\ \wedge \\ AC = DF\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF} \end{array}\right\} \Rightarrow BC = EF.$$

Preuve : Les triangles $\overset{\triangle}{ACB}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congruents (ex. 12 leçon 31, cas SAS), d'où $BC = EF$.

Lemme C6b :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} AB = DE\ \wedge \\ AC = DF\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}.$$

Preuve : Les triangles $\overset{\triangle}{ACB}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congruents (ex. 12 leçon 31, cas SAS), d'où $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$.

Lemme C6c :

$$\forall\ A\ B\ C\ D\ E\ F,\ \left.\begin{array}{l} AB = DE\ \wedge \\ AC = DF\ \wedge \\ \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{ACB} \equiv \widehat{DFE}.$$

Preuve : Les triangles $\overset{\triangle}{ACB}$ et $\overset{\triangle}{DEF}$ sont congruents (ex. 12 leçon 31, cas SAS), d'où $\widehat{ACB} \equiv \widehat{DFE}$.

Leçon 64

Axiomes de continuité

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `Hilbert4.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Ce chapitre étudie les axiomes de continuité de Hilbert dans le cadre de notre géométrie plane. La propriété de distance archimédienne est vérifiée. Par contre, ainsi que nous avons déjà eu l'occasion de le dire, ni l'axiome de Dedekind, ni celui équivalent de Cantor ne peuvent être vérifiés, la droite des points construits n'étant pas en bijection avec l'ensemble des réels.

64.1 Axiome de distance archimédienne

Enoncé : *Etant donnés deux segments non nuls $[AB]$ et $[CD]$, il existe un entier n tel que n copies de $[AB]$ aboutées les unes aux autres forment un segment plus grand que $[CD]$.*

Lemme D1 :

$$\forall\ A\ B\ C\ D,\ A \neq B \Rightarrow \exists\ n, \exists\ E, \begin{cases} E \in [AB)\ \wedge \\ AE = n * AB\ \wedge \\ CD < AE. \end{cases}$$

Preuve :

- Soit F la marque de CD sur (AB),
- soit n l'entier strictement positif tel que $AF < n * AB$ (ex. 6 leçon 21),
- l'entier n répond à la question,
- soit E la $n^{i\grave{e}me}$ graduation de (AB),
- l'entier E répond à la question.

Remarque : Il n'est pas nécessaire que C soit distinct de D, par contre il faut $A \neq B$.

64.2 Axiome de continuité de la droite

Enoncé de Dedekind: *Supposons qu'une droite l soit divisée en deux sous-ensembles non vides de points S et T tels qu'aucun point de S ne soit entre deux points de T, ni aucun point de T entre deux points de S, alors il existe un unique point P tel que pour tout point $A \in S$ et tout point $B \in T$ soit $A = P$ soit $B = P$ soit P est entre A et B.*

Enoncé de Cantor: *Pour toutes suites d'intervalles $(]A_nB_n[)_{n \in N}$ emboîtés d'une droite δ, si aucun intervalle n'est contenu dans tous ces intervalles, alors il existe un unique point M appartenant à tous ces intervalles.*

Leçon 65

Axiomes de parallélisme

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `Hilbert5.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

Ce chapitre étudie l'axiome d'Euclide dans le cadre de notre géométrie plane. Nous l'avions introduit dans notre système d'axiome par l'axiome 19 qui exprimait que la somme des angles d'un triangle était égale à un angle plat.

65.1 Axiome d'Euclide

Enoncé : *Par un point donné, il passe une parallèle et une seule à une droite donnée.*

Lemme E1 :

$$\forall\ A, \forall\ \delta, \exists\ \delta', \delta \parallel \delta' \wedge A \in \delta'.$$

Preuve :

- Soit B et C les points de construction de δ, on raisonne par cas selon la position des trois points A, B et C :
  - $\circlearrowleft ABC$: comme $A \notin \delta$ on applique la construction de la parallèle à une droite passant par un point extérieur à cette droite (leçon 52), cette parallèle répond à la question,
  - $\circlearrowleft BAC$: comme $A \notin \delta$ on applique la construction de la parallèle à une droite passant par un point extérieur à cette droite (leçon 52), cette parallèle répond à la question,
  - $\overline{ABC}$: comme $A \in \delta$ la droite δ répond à la question.

Remarque : La construction de la leçon 52 exigeait $A \notin \delta$. Comme on montre les axiomes de Hilbert dans *Prop*, il est possible de distinguer le cas $A \in \delta$ du cas $A \notin \delta$ alors que nous n'avons pas une construction valable quelle que soit le cas. C'est un des intérêt de notre géométrie de faire la distinction entre "il existe" (dans *Prop*) et "on sait construire" (dans *Set*).

Lemme E2 :

$$\forall\ A, \forall\ \delta\ \delta'\ \delta'',\ \left.\begin{array}{l}\delta \parallel \delta' \land \\ A \in \delta' \land \\ \delta \parallel \delta'' \land \\ A \in \delta''\end{array}\right\} \Rightarrow \delta' = \delta''.$$

Preuve : Exercice 1 leçon 55.

Livre 17 : Annexe 3 : Un exemple

A propos de ce tome : Nous terminerons par un exemple. Le théorème de Bolyaï est une bonne illustration de ces démonstrations qui sont en même temps une construction de la figure solution.

Ce tome est divisé en deux leçons : la première donnant la démonstration telle qu'elle peut être fait avec le bagage d'ores et déjà acquis, la seconde est une évocation de l'outil pédagogique qu'il serait possible de créer à partir de ce travail.

Leçon 66

Théorème de Bolyaï

Avertissement : Ce paragraphe correspond au fichier `Bolyai.v` de la contribution `EuclidianGeometry` de Coq.

66.1 Théorème de Bolyaï

Enoncé : *Trois points non alignés sont cocycliques.*

Lemme :

$$\forall\ A\ B\ C,\ \neg\overline{ABC} \Rightarrow \exists\ \gamma,\ A \in \gamma\ \wedge\ B \in \gamma\ \wedge\ C \in \gamma.$$

Preuve :

- Soient A, B et C trois points et H l'hypothèse $\neg\overline{ABC}$,
- soit d_1 la médiatrice de $[AB]$,
- soit d_2 la médiatrice de $[BC]$,
- les droites (AB) et (BC) étant sécantes, les droites d_1 et d_2 sont sécantes,
- soit E le point d'intersection de d_1 et d_2,
- soit γ le cercle de centre E et de rayon EB,
- γ répond à la question car :
  - puisque E est sur d_1, $EA = EB$,
  - puisque E est sur d_2, $EB = EC$.

Liste de tactiques : A chaque item de la démonstration précédente correspond une tactique :

- intros.
- setMidLine A B d1.

- setMidLine B C d2.
- from (Ruler A B H0, Ruler B C H4) (SecantLines d1 d2).
- setInterLines d1 d2 E.
- setCircle E E B gamma.
- answerIs gamma.
- from H1 (Distance E A = Distance E B).
- from H5 (Distance E B = Distance E C).
- Qed.

Liste d'hypothèses : A chaque application d'une tactique correspond une évolution de l'environnement :

-
  - A : Point
  - B : Point
  - C : Point
  - H : ¬Collinear A B C
-
  - H0 : A <> B
  - d1 := MidLine A B H0 : Line
  - H1 : forall M : Point, OnLine d1 M -> Distance M A = Distance M B
  - H2 : forall M : Point, Distance M A = Distance M B -> OnLine d1 M
  - H3 : Perpendicular (Ruler A B H0) d1
-
  - H4 : B <> C
  - d2 := MidLine B C H4 : Line
  - H5 : forall M : Point, OnLine d2 M -> Distance M B = Distance M C
  - H6 : forall M : Point, Distance M B = Distance M C -> OnLine d2 M
  - H7 : Perpendicular (Ruler B C H4) d2
-
  - H8 : SecantLines d1 d2
-
  - E := InterLinesPoint d1 d2 H8 : Point
  - H9 : OnLine d1 E
  - H10 : OnLine d2 E
-
  - gamma := Compass E E B : Circle
- .
-
  - H11 : Distance E A = Distance E B
- Proof completed.

Commentaires

- Les hypothèses $H0$ et $H4$ ont été déduites automatiquement de H.
- Une fois apparues dans l'environnement, les hypothèses peuvent être utilisées dans les paramètres des tactiques.
- la tactique *answerIs gamma* n'ajoute pas d'hypothèse, mais crée un nouveau but à montrer *OnCircle gamma A* $\wedge$ *OnCircle gamma B* $\wedge$ *OnCircle gamma C*.
- la tactique *from H5 (Distance E B = Distance E C)* va créer temporairement l'hypothèse *H12 : Distance E B = Distance E C* mais comme *immediate* va résoudre le but, il n'apparaît plus que la phrase type *Proof completed* par lequel *Coq* signale qu'il n'y a plus de but à démontrer.
- La commande *Qed* de *Coq* a pour résultat de vérifier la correction de la preuve et d'enregistrer le lemme afin qu'il puisse être utilisé ultérieurement (pour plus de détails et de rigueur, lire la documentation de *Coq*), sa présence pour terminer la preuve n'est pas génante puisqu'elle répond à une vieille habitude en mathématiques de signaler la fin d'une preuve.

Conclusion On voit sur cet exemple que même si les démonstrations sont plus contraintes, que même si les étapes ne correspondent pas nécessairement au découpage que l'on aurait fait lors de l'écriture d'une preuve papier, les preuves de géométrie plane dans ce système sont assez proches de la démarche naturelle d'un utilisateur fût-il totalement ignorant du mécanisme interne de *Coq*. La leçon suivante va imaginer ce que pourrait être une interface permettant de s'affranchir de travailler avec une figure dynamique et en utilisant sa propre langue.

Leçon 67

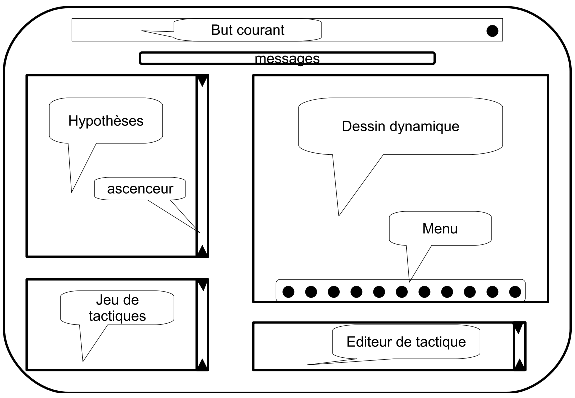
Outil pédagogique

Avertissement : Ce paragraphe fait suite au travail de Vincent Laporte.

67.1 Présentation générale

Logiciel de dessin dynamique : Comme nous l'avions dit dans la conclusion, il serait intéressant de pouvoir associer un logiciel de géométrie dynamique comme *Cabri-géomètre* ou *GeoGebra* à un assistant de preuves comme *Coq* afin de combiner les moyens de faire la figure et le raisonnement en toute rigueur.

Les différentes fenêtres :



On peut imaginer la division de l'espace de travail ainsi :

- l'affichage du but courant : il contient la traduction en langue usuelle du but *Coq*, il affiche donc le problème à résoudre. Cette fenêtre peut également être utilisée pour afficher les autres buts sur demande.
- l'affichage des messages : les messages provenant de *Coq* peuvent être, par exemple, l'échec d'une tactique ou la fin d'une démonstration.
- l'affichage des hypothèses : celles-ci sont des traductions de l'environnement courant dans la langue usuelle. Cette liste peut être longue car elle est

nécessairement détaillée, il faudra prévoir le mécanisme de défilement.

- le jeu de tactiques : cette fenêtre affiche la liste de ces phrases types correspondantes à des appels de tactiques.

- la figure : un logiciel de dessin dynamique propose en général une fenêtre dans laquelle s'affiche le dessin et un menu pour agir sur le dessin. Bien que trop riche en possibilités pour l'usage qui lui est demandé ici, on peut imaginer conserver cette fenêtre telle quelle, mais on peut aussi envisager de la redéfinir pour la restreindre à son usage.

- un éditeur de tactique : c'est une fenêtre de texte dans lequel l'utilisateur peut éditer et envoyer un énoncé, éditer et envoyer une tactique à *Coq* pour avancer dans la preuve ou éditer et envoyer une commande de terminaison ou d'archivage par exemple.

Le système Le système doit faire collaborer trois intervenants : l'utilisateur, le logiciel de dessin dynamique et l'assistant de preuves.

- De l'assistant de preuves vers l'utilisateur : le système possède un traducteur permettant l'affichage de l'environnement dans la fenêtre des hypothèses et du but dans la fenêtre du but dans la langue usuelle, ainsi que les messages dans la fenêtre des messages. Cette traduction n'est pas trop complexe car le langage de départ est très contraint. Il doit cependant rester suffisament ouvert pour permettre l'ajout de notions nouvelles.

- De l'utilisateur vers l'assistant de preuves : le problème est inverse, laisser à l'utilisateur toutes les libertés syntaxiques et grammaticales de sa langue conduit à l'écriture d'un traducteur possédant un analyseur très sophistiqué. Une proposition plus simple consiste à se restreindre à l'emploi de phrases types. Pour éviter un effort de mémorisation de ces phrases et raccourcir la saisie de ces phrases, la liste en est affichée dans la fenêtre du jeu de tactiques, il suffit dès lors de choisir la phrase pour que celle-ci s'affiche dans la fenêtre de l'éditeur de tactique. Il suffit de la compléter avec les paramètres et de l'envoyer pour qu'elle soit traduite en une tactique de l'assistant de preuves. Cette fenêtre est également utilisée pour poser le problème initial. Ici aussi, un certain nombre de contraintes syntaxiques et grammaticales peuvent faciliter la traduction.

- Du logiciel de géométrie dynamique vers l'utilisateur : celui-ci affiche la figure dans la fenêtre, selon le logiciel, il peut aussi afficher d'autres informations (coordonées, propriétés, etc).

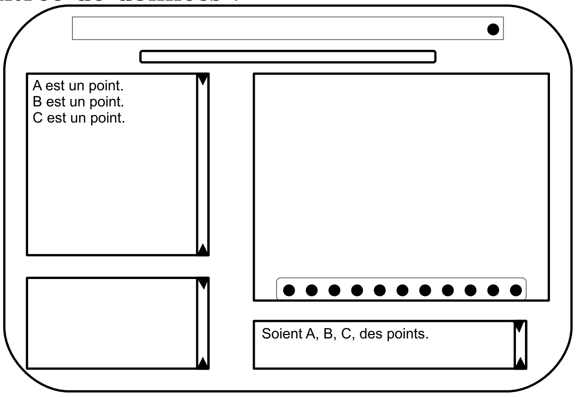
- De l'utilisateur vers le logiciel : l'utilisateur peut modifier la figure selon les règles usuelles d'un logiciel de géométrie dynamique, c'est-à-dire en respectant les contraintes imposées lors de la construction de la figure.

- De l'assistant de preuves vers le logiciel de géométrie dynamique : il y a deux étapes importantes. La construction de la figure initiale peut être engendrée par l'introduction de l'énoncé (elle peut aussi être faite par l'utilisateur). Si tous les prédicats sur les variables de l'environnement peuvent être traduits en contraintes satisfiables par le dessin, il n'y a pas trop de difficulté à générer ce dessin automatiquement. Mais comme ce ne peut être toujours le cas, il faut prévoir un ordre sur les contraintes de façon à les satisfaire au fur et à mesure tant que cela est possible. (Si le dessin engendré ne statisfait pas l'utilisateur, il a toujours la possibilité d'intervenir). L'évolution du dessin au cours de la preuve prend soit la forme d'ajouts soit d'effacements. Les ajouts se font lors des constructions, comme celles-ci sont parfaitement déterministes (vision constructive de la géométrie), dès qu'elles sont repérées, il n'y a pas de difficultés majeures à les inclure dans le dessin (tout n'est pas pour le mieux dans le meilleur des mondes cependant, il peut s'avérer qu'un point soit construit en dehors de la fenêtre et exiger un zoom pour apparaître par exemple). Les effacements sont nécessaires lors de raisonnements par cas, lorsqu'un sous but est prouvé, toutes les constructions réalisées lors de la preuve de ce sous but doivent être effacées.

- Du logiciel de géométrie plane vers l'assistant de preuves : le dessin n'agit pas sur le déroulement de la preuve. Mais le logiciel de dessin est sollicité pour l'affichage de la liste des hypothèses. Comme nous l'avons dit, les prédicats sur les variables sont traduites en contraintes de dessin. Celles-ci peuvent ou non être vérifiées. Un code couleur inventé par Vincent Laporte peut s'avérer très utile : par exemple, apparaîtront en vert les hypothèses vérifiées par la figure, en rouge celles qui ne le sont pas, en gris, celles qui ne font pas l'objet d'une vérification. Il peut y avoir des hypothèses non satisfaites, soit parce que la construction de la figure s'est avérée hors des possibilités du moteur, soit parce que le cas correspond à un raisonnement par l'absurde avec au moins une hypothèse non satisfaite. Enfin, il existe des hypothèses qui ne peuvent être vérifiées, en particulier, toute hypothèse quantifiée. Après chaque pas dans la preuve, l'affichage des hypothèses se fait via une procédure de coloriage. Toute hypothèse vérifiable active une requête auprès du logiciel de dessin. La réponse de ce dernier détermine la couleur de l'affichage de l'hypothèse. La correspondance entre prédicats et requêtes doit être stockées dans un fichier modifiable pour pouvoir introduire de nouvelles notions. L'utilisateur pouvant à tout moment intervenir sur la figure, il pourra demander à réactualiser les couleurs.

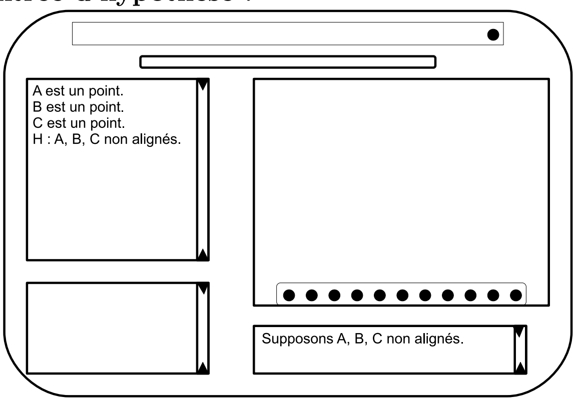
67.2 Démonstration du théorème de Bolyaï

Entrée de données :



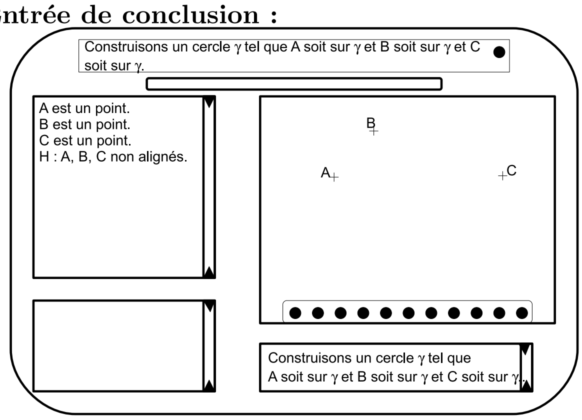
On utilise une phrase clé commençant par "Soient". Les trois points apparaîssent dans l'environnement. Ils apparaitront sur la figure à la fin de l'entrée du problème.

Entrée d'hypothèse :



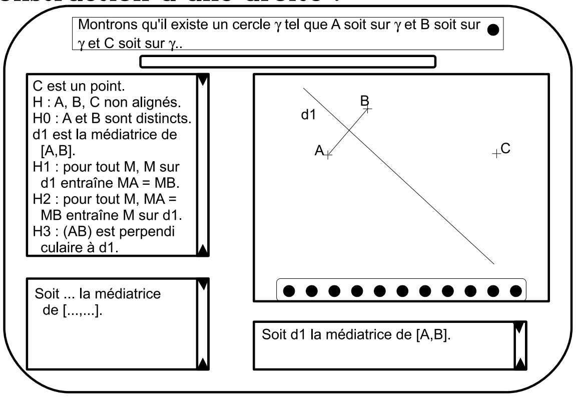
On utilise la phrase clé commençant par "Supposons". L'hypothèse apparaît dans l'environnement avec un nom "H".

Entrée de conclusion :



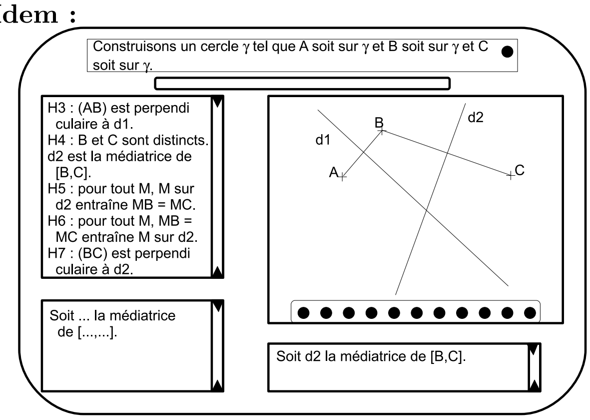
On utilise la phrase clé commençant par "Construisons" (si le but avait été une propriété, le mot clé aurait été "montrons"). Le but apparaît dans la fenêtre du but courant. Une figure est engendrée automatiquement. La seule contrainte étant que les trois points ne doivent pas être alignés est facile à respecter. Les trois points et l'hypothèse "H" apparaissent en vert dans les hypothèses car ils satisfont la figure.

Construction d'une droite :

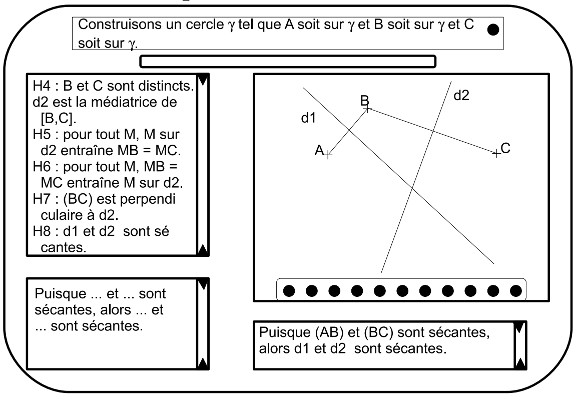


On utilise la phrase clé "Soit ... la médiatrice de [...,...]." en remplçant les pointillés par "d1", "A" et "B". Cette phrase est automatiquement traduite en la tactique *setMidLine A B d1.* Cette tactique de construction vérifie la précondition $A \neq B$ qui s'affiche sous le nom de "H0", puis crée la droite "d1" avec sa construction, enfin génére les hypothèses "H1", "H2" et "H3". Cette tactique ne modifie pas le but. L'affichage des hypothèses interfère avec le dessin. L'hypothèse "H0" étant vraie dans le dessin, elle est coloriée en vert. La droite "d1" avec sa construction engendre l'apparition de la médiatrice de [A,B] sur le dessin. Les hypothèses "H1" et "H2" ne sont pas vérifiables, elles apparaissent en gris. L'hypothèse "H3" est vraie sur le dessin, elle apparaît en vert.

Idem :

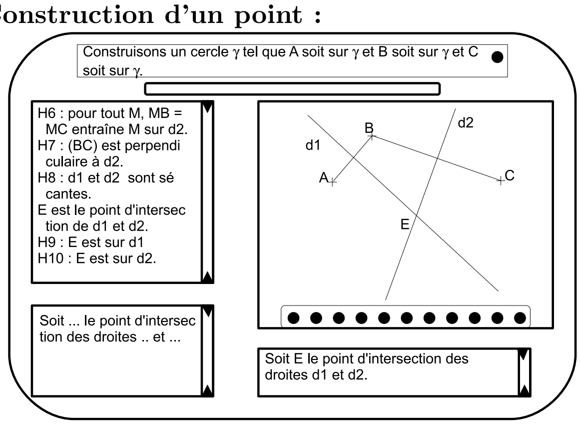


Assertion d'un prédicat :



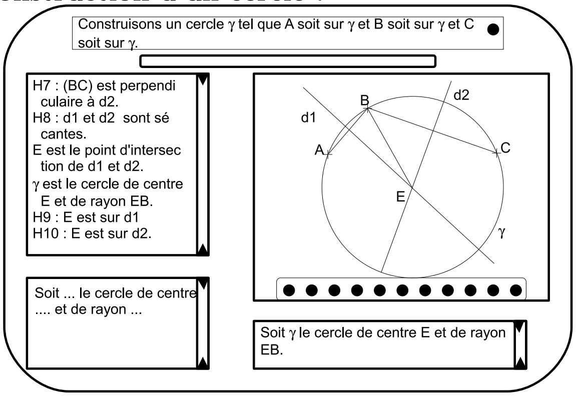
On utilise la phrase clé "Puisque ... et ... sont sécantes, alors ... et ... sont sécantes" avec les paramètres "(AB)", "(BC)", "d1" et "d2". Elle est traduite en la tactique *from (Ruler A B H0) (Ruler B C H4) (SecantLines d1 d2)*. Si c'est trop demander au traducteur, il est facile d'imaginer des étapes intermédiaires, par exemple "Soit ab la droite passant par A et B", etc. Cette tactique n'a qu'un effet apparent, ajouter l'hypothèse "H8" qui se colore en vert.

Construction d'un point :



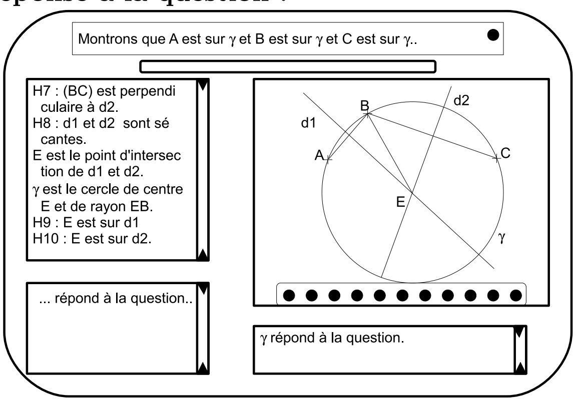
On utilise la phrase clé de construction du point d'intersection de deux droites. La tactique a pour effet d'ajouter le point E et sa construction dans les hypothèses, les hypothèses "H9" et "H10" qui sont coloriées en vert. Sur la figure le point "E" apparaît, ce qui peut nécessiter un recadrage ou un zoom.

Construction d'un cercle :



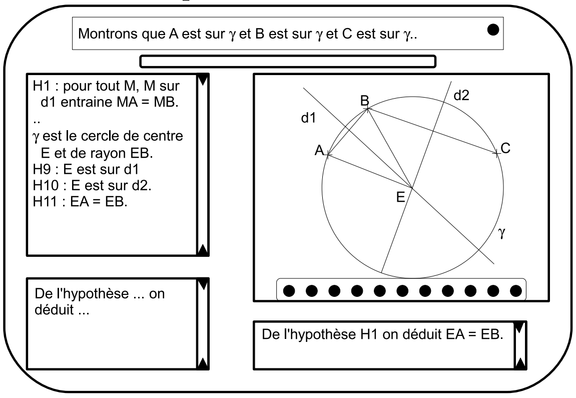
On utilise la phrase clé de construction d'un cercle qui apparait alors dans les hypothèses avec sa construction puis dans la figure (on peut imaginer que le segment "EB" mentionné comme rayon du cercle apparaît sur la figure).

Réponse à la question :



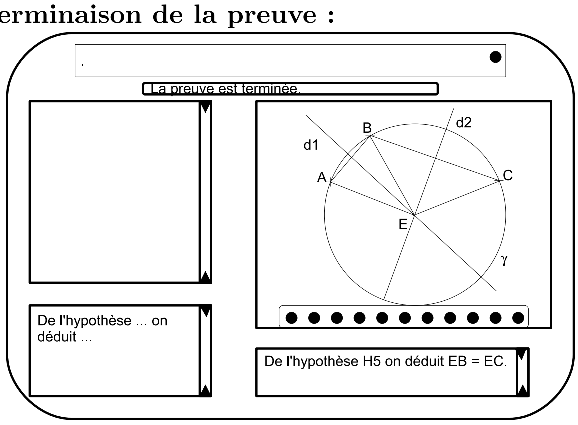
On utilise la phrase clé "... répond à la question" qui appelle la tactique *answerIs gamma*. Son application ne modifie ni les hypothèses, ni la figure, mais modifie le but qui était quantifié par un il existe constructif : "construisons". Le but est désormais une propriété (la conjonction de trois appartenances). On pourrait imaginer que le fonctionnement de la tactique fait disparaître $B \in \gamma$ du but car elle se déduit immédiatement des hypothèses mais telle que le jeu de tactiques a été proposé, il ne fonctionne pas ainsi.

Assertion d'un prédicat :



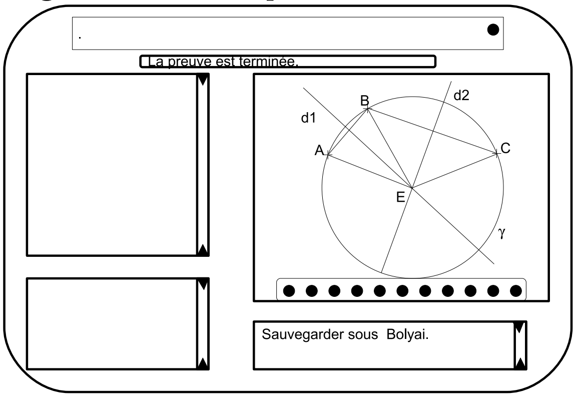
Cette étape n'a pour objet que d'ajouter l'hypothèse "H11". On peut imaginer que le logiciel de dessin trace le segment [EA] puisque sa longueur apparaît dans les hypothèses. On pourrait aussi imaginer que la premier prédicat $A \in \gamma$ s'efface du but car se déduisant immédiatement des hypothèses.

Terminaison de la preuve :



Avec le jeu actuel de tactiques proposé, le but s'efface automatiquement car les trois prédicats se déduisent immédiatement des hypothèses. Avec le fonctionnement de *Coq*, dès qu'il n'y a plus de but à démontrer, l'environnement devient vide. Dans un outil didactique, on peut trouver ce fonctionnement trop brutal et conserver toutes les hypothèses.

Enregistrement de la preuve :



Le fonctionnement de *Coq* demande d'appeler la commande "Qed" ou "Save". On pourrait imaginer écrire dans la fenêtre utilisateur la commande de sauvegarde du théorème avec son nom. Cette sauvegarde aurait pour effet, non seulement d'enregistrer le script *Coq* mais également un texte de la démonstration qui serait pratiquement l'ensemble des phrases clés écrites à chaque étape ainsi qu'une figure qui pourrait être celle de la dernière étape.